文章编号:1673 - 0062(2011)02 - 0052 - 03

多项式的正交性与其零点有界性的一个注记

王红勇,朱　晖,唐衡生

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:设 $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 是首一复正交多项式序列,其中 Φ_n 的次数为 n , $n \geqslant 1$, 且 Φ_n 的零点 $z_{n,j}$, $j = 1,2,\cdots,n$,满足 $|z_{n,j}| < 1$. 本文讨论 $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 的正交性,某个比值的有界性和条件 $|z_{n,j}| < 1$, $j = 1,2,\cdots,n$ 之间的联系.

关键词:复多项式;正交;正波雷尔测度

中图分类号:O175.26　　　**文献标识码**:A

A Note on the Boundness of Zeros and Orthogonality

WANG Hong-yong, ZHU Hui, TANG Heng-sheng

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Let $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be a series of monic complex polynomials with deg $\Phi_n = n$, such that $z_{n,j}$, $j = 1,2,\cdots,n$, the zeros of Φ_n , for each $n \geqslant 1$, satisfy $|z_{n,j}| < 1$. We establish the relationship between the orthogonality of such a series, the boundness of a certain ratio and the condition $|z_{n,j}| < 1$, $j = 1,2,\cdots,n$.

key words: complex polynomials; orthogonality; positive Borel measure

2001 年,M. Alfaro 等人在文献[1]中提出了这样一个问题:如果 $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 分别是关于两个不同的正波雷尔测度 μ_1 和 μ_2 正交的首一多项式序列. 问在什么条件下 $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 仍是正交多项式序列? 其中 $R_n(x) = aP_n(x) + bQ_n(x)$, a 和 b 都是非零常数.

对于这个问题,不少学者猜测:若对每一个非负整数 n ,存在常数 a 和 b 使得 $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 中任意两个相邻多项式 $R_n(x)$ 和 $R_{n+1}(x)$ 的零点互不相等且具有交叉性质,则 $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是关于某个正波雷尔测度正交的多项式族. 这里零点具有交叉性质是指:若记 $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ 为 $P_n(x)$ 的 n 个互不相同的实零点, $x_{1,n+1} < x_{2,n+1} < \cdots < x_{n+1,n+1}$ 为 $P_{n+1}(x)$ 的 $n+1$ 个互不相同的实零点,则这些零点具有如下性质

$$x_{1,n+1} < x_{1,n} < x_{2,n+1} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < x_{n+1,n+1} .$$

在经典的正交多项式理论里面,一个众所周知的事实是:实正交多项式族中任意两个相邻正交多项式的零点都具有交叉性质. 以上的猜测从某种程度上讲是关于这个事实的一个反问题,即若一个多项式族中任意两个相邻多项式的零点都

收稿日期:2011 - 03 - 17

作者简介:王红勇(1982 -),男,湖南株洲人,南华大学数理学院讲师,博士研究生. 主要研究方向:渐近分析.

具有交叉性质,是否可以证明这个多项式族是正交多项式族.在文献[2]中,Drive 指出当 $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 是实正交多项式时,这个猜测是错误的.另一方面,由经典的正交多项式理论知道,定义在单位圆上的正交多项式的零点都在单位圆内,这与实正交多项式的零点具有交叉性质相当.受此启发,本文给出定义在单位圆上的多项式族的正交性与其零点在单位圆内的一个充分必要条件,从而完善 Drive 对 M. Alfaro 等人所提问题的回答.

1　预备知识

为了叙述方便,我们先引入一些记号[3]. $D=\{z\in C:|z|<1\}$ 表示开的单位圆盘, $\Omega=\partial D$ 表示单位圆. μ 是单位圆上的有限的正波雷尔测度,且具有无限支集, $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 是关于 μ 正交的首一(首项系数为1)复正交多项式,即

$$\Phi_n(z)=z^n+\cdots+\Phi_n(0),$$

并且满足

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}\Phi_n(e^{i\theta})\overline{\Phi_n(e^{i\theta})}d\mu(\theta)=A_n\delta_{nm},\ n,m\in Z^+,$$

其中 $A_n>0$, δ_{nm} 是 Kronecker 符号.另外, $\Phi_n^*(z)=z^n\overline{\Phi(1/\bar{z})}$ 是 $\Phi_n(z)$ 的倒多项式(reciprocal polynomial).由经典的多项式理论知 $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 满足 Szegö 迭代式[4]

$$\Phi_n(z)=z\Phi_{n-1}(z)+\Phi_n(0)\Phi_{n-1}^*(z),$$

$\Phi_0(z)=1, n=1,2,3,\cdots$.

正如第一节所言,目的是要建立复首一多项式序列 $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 的正交性,某个比例的有界性,和条件 $|z_{n,j}|<1$, $j=1,2,3,\cdots,n$ 三者之间的联系.结果表明 $|z_{n,j}|<1$, $j=1,2,3,\cdots,n$ 并不是使得 $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 正交的充分条件.

2　主要定理的叙述和证明

首先,我们给出本文的第一个定理.

定理1　对每一个 $n\geq 1$, $n\in N$,让 Φ_n 和 Φ_{n-1} 分别代表次数为 n 和 $n-1$ 的复多项式.假设 $z_{n,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 是 Φ_n 的零点,他们当中的某些零点允许相等,但 $\Phi_n(z)$ 与 $\Phi_n^*(z)$ 的零点互不相同.那么 Φ_n, Φ_{n-1},及 Φ_{n-1}^* 满足下面的迭代式

$$\Phi_n(z)=z\Phi_{n-1}(z)+\varepsilon_n\Phi_{n-1}^*(z)\qquad(1)$$

当且仅当

$$\frac{z_{n,1}\Phi_{n-1}(z_{n,1})}{\Phi_{n-1}^*(z_{n,1})}=\cdots=\frac{z_{n,n}\Phi_{n-1}(z_{n,n})}{\Phi_{n-1}^*(z_{n,n})},\qquad(2)$$

其中 $\Phi_0(z)=1$.

证明:把 $z_{n,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 代入式(1)当中,由假设: $z_{n,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 是 Φ_n 的零点,不难推出式(2)成立.反过来,假设式(2)成立,让 ε_n 代表式(2)当中的比值.那么, $z\Phi_{n-1}(z)+\varepsilon_n\Phi_{n-1}^*(z)$ 是首项系数为1,次数为 n 的多项式,记为 $\Psi_n(z)$.由式(2)知 $z_{n,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 是其所有零点,这表明 $\Psi_n(z)$ 和 $\Phi_n(z)$ 的零点完全一样,又两者都是首项系数为1的多项式,从而必有 $\Psi_n(z)=\Phi_n(z)$.所以式(2)对任意的 $n\geq 1$, $n\in N$ 成立.证完.

接下来,我们给出本文的中心结果.

定理2　设 $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 是次数为 n 的首一复多项式序列,若对每一个 $n\geq 1$, $n\in N$,式(2)成立,同时 $\Phi_n(z)$ 与 $\Phi_n^*(z)$ 的零点互不相同.则下面三个条件相互等价:

(i)序列 $\{\Phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 关于唯一的有限的正波雷尔测度正交,且测度的支集是无限的.

(ii) $|\varepsilon_n|<1$,其中 $-\varepsilon_n$ 是式(2)当中的比值.

(iii) $\Phi_n(z)$ 的零点都在单位圆内,即 $|z_{n,j}|<1, j=1,2,\cdots,n$.

证明:由(i)到(ii)是平凡的,而由(ii)到(iii)是正交多项式的经典结果.反过来,由(ii)到(i)来自于单位圆上 Favard 定理,见文献[5]中定理8.1,p.156 和文献[6]中定理8.3,p.140.因此,我们只需证明:如果(iii)成立,那么(ii)成立.

设 $z_{n,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 代表 $\Phi_n(z)$ 的所有零点,他们当中的某些零点可以相等.所以若(iii)成立,则有 $|z_{n,j}|<1$, $j=1,2,\cdots,n$.把 $z_{n,j}$, $j=1,2,\cdots,n$ 代入式(1),可得

$$|\varepsilon_n|=|z_{n,j}|\left|\frac{\Phi_{n-1}(z_{n,j})}{\Phi_{n-1}^*(z_{n,j})}\right|$$

因为 $\Phi_{n-1}^*(z)$ 的所有零点在单位圆之外,所以在单位圆内 $\Phi_{n-1}^*(z)\neq 0$.从而,函数 $\frac{\Phi_{n-1}(z)}{\Phi_{n-1}^*(z)}$ 在 D 内解析.另一方面,如果 $z\in\Omega$,则有 $\left|\frac{\Phi_{n-1}(z)}{\Phi_{n-1}^*(z)}\right|=1$.由最大模原理,若 $|z_{n,j}|<1$,则有 $\left|\frac{\Phi_{n-1}(z_{n,j})}{\Phi_{n-1}^*(z_{n,j})}\right|\leq 1$, $j=1,2,\cdots,n$,因此, $|\varepsilon_n|<1$.证完.

注:超几何函数的定义如下

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!}z^k,$$

$|z| < 1$,

其中符号 $(\nu)_k$ 定义为

$(\nu)_k = \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1)$.

当 $\alpha = -n$ 时, ${}_2F_1(-n,\beta;\gamma;z)$ 是次数为 n 的多项式,在文献[7]中,作者已经证明当 $\beta = 2$, $\gamma = -n + 1/2$ 时,其所有零点均在单位圆盘 D 之内,若记 $p_n(z) = {}_2F_1(-n,2;-n+1/2;z)$,由定理 2 知, $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 不是定义在单位圆上的正交多项式,事实上,其前三项为

$$p_1(z) = 1 + 4z , p_2(z) = 1 + \frac{8}{3}z + 8z^2 ,$$

$$p_3(z) = 1 + \frac{12}{5}z + \frac{24}{5}z^2 + \frac{64}{5}z^3 ,$$

其中 $p_3(z)$ 的零点为 $z_1 = -0.397\ 6$, $z_2 = 0.011\ 3 + 0.443\ 1i$, $z_3 = 0.011\ 3 - 0.443\ 1i$. 易知

$$\frac{z_1p_2(z_1)}{p_2^*(z_1)} = -0.067\ 5, \frac{z_2p_2(z_2)}{p_2^*(z_2)} = 0.065\ 8 - 0.025\ 9i, \frac{z_3p_2(z_3)}{p_2^*(z_3)} = 0.065\ 8 + 0.025\ 9i ,$$

所以,不存在任何定义在单位圆上的,有限的且具有无限支集的正波雷尔测度使得 $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ 关于其正交.

3 结束语

由定理 2,我们可以回答 M. Alfaro 等人所提的问题,即当选取的常数 a 和 b 使得 $R_n(x)$ 的零点满足定理 2 所给条件时, $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 就是关于某个定义在单位圆上的,有限的且具有无限支集的正波雷尔测度正交的多项式序列. 另外,对于其他类型的正交关系,比如 L 型正交(L-orthogonal)也可以考虑类似的问题.

参考文献:

[1] Alfaro M, Marcellán F, Peña A, et al. When do linear combinations of orthogonal polynomials yield new sequences of orthogonal polynomials? [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010, 233(6): 1446-1452.

[2] Drive K. A note on the interlacing of zeros and orthogonality[J]. J. Approx. Theory, 2009(161): 508-510.

[3] Erdélyi T, Nevai P, Zhang J, et al. A simple proof of "Favard's theorem" on the unit circle[J]. Atti Sem. Mat. Fis. Univ., 1991(39): 551-556.

[4] Geronimus Y L. Polynomials orthogonal on a circle and their applications[J]. Amer. Math. Soc. Transl., 1954 (104): 79-83.

[5] Geronimus Ya L. Orthogonal polynomials[M]. New York: Consultants Bureau, 1961.

[6] Jones W B, Nj°astad O, Thron W J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle[J]. Bull. London Math. Soc., 1989(21): 113-152.

[7] 周建荣, 黄民海, 王红勇. 几类高斯超几何多项式零点的渐近分布[J]. 中山大学学报, 2011, 50(2): 28-30.