文章编号:1673 - 0062(2011)02 - 0049 - 03

一种亚式重置期权的定价

刘邵容,朱 晖

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要: 亚式期权和重置期权都是路径依赖型期权,结合两种期权的特点,本文创设了一种新型期权,利用等价鞅方法,给出了新型变异期权在 O - U 过程下的定价公式.

关键词: 亚式期权;重置期权;O - U 过程模型;布朗运动

中图分类号: F224 **文献标识码:** A

The Pricing of the Asian-reset Option

LIU Shao-rong, ZHU Hui

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: The Asian option and reset option are the path-depending options. Through combining the two options, this paper designed a new option. By using the martingale method, under the hypothesis that the asset price obey the Ornstein-Uhlenback process, the pricing formulas of the new option have been get.

key words: Asian option; reset option; the Ornstein-Uhlenback process; Brown motion

期权作为金融衍生品市场创新的典范,已经成为投资者进行防范风险的重要工具. 1973 年美国芝加哥大学教师 Black 和 Scholes 推导出了 Black-Scholes 期权定价公式,对期权定价和风险管理进行了定量分析,推动了期权定价研究和应用的迅猛发展. 作为路径依赖型的变异期权,重置期权在约定的条款下,可以重新设置期权的敲定价格,亚式期权的到期收益依赖于资产价格的某种平均. 本文对这两种期权进行了改进,创设了一种亚式重置期权,利用鞅方法,给出了亚式重置期权在 Ornstein-Uhlenback(O - U)过程模型下的定价公式.

1 金融市场模型

假定金融市场完备、无套利,且市场中只有两种资产在时间$[0,T]$内连续交易,一种是无风险资产,其在 t 时刻的价格 $B(t)$满足:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, B(0) = 1 \qquad (1)$$

另一种是风险资产(股票),价格过程 $S(t)$由如下的随机微分方程决定:

$$dS(t) = S(t)[\mu(t)dt - a\ln S(t)dt + \sigma(t)dW^P(t)], S(0) = S_0 \qquad (2)$$

收稿日期: 2011 - 04 - 07

作者简介: 刘邵容(1982 -),女,湖南邵阳人,南华大学数理学院助教,硕士. 主要研究方向:概率统计.

其中：$r(t)$ 为无风险利率，$W^P(t)$ 为概率空间 $(\Omega,F,(F)_t,P)$ 上的标准布朗运动，$\mu(t)$ 为平均回报率，$\sigma(t)$ 为收益波动率，a 为非负常数，当 $a=0$ 时即为 Black-Scholes 模型中的风险资产价格方程，$a>0$ 时的作用是当股票价格上升到一定高度后，使之有下降的趋势，此时模型(2)称为指数 O－U 过程.

引理 1 令 $\theta(t)=\dfrac{\mu(t)-r(t)-a\ln S(t)}{\sigma(t)}$，若 $E^P(\exp\{\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(s)\mathrm{d}s\})<\infty$，则存在唯一等价鞅测度 Q，使在测度 Q 下，股票价格的折现过程 $S^*(t)=S(t)\exp\{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\}$ 是一个鞅过程，令 $W^Q(t)=W^P(t)+\int_0^t\theta(s)\mathrm{d}s$，则 $W^Q(t)$ 是测度 Q 下的标准布朗运动.

根据引理，由 Girsanov 定理知，在测度 Q 下，随机微分方程(2)可以化为：

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)[r(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W^Q(t)],S(0)=S_0 \tag{3}$$

由 Ito 公式解(3)得：

$$S(t)\equiv S_t=S_0\exp\{\int_0^t(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(s)\mathrm{d}W^Q(s)\}$$

，此时，$\ln S(t)\sim N(\ln S_0+\int_0^t(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s,\int_0^t\sigma^2(s)\mathrm{d}s)$. 同样我们可以定义与测度 Q 等价的测度 R，设 $\delta(t)=\exp\{-\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\}\dfrac{S(t)}{S(0)}$，$\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}R}|F_t=\delta(t)$，由于 $E^Q(\delta(t))=1$，则测度 R 有意义，且 $W^R(t)=W^Q(t)-\int_0^t\sigma(s)\mathrm{d}s$ 是测度 R 下的标准布朗运动，在测度 R 下，式(3)可化为：

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)[r(t)\mathrm{d}t+\sigma^2(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}W^R(t)],S(0)=S_0 \tag{4}$$

由 Ito 公式得：

$$S(t)=S_0\exp\{\int_0^t(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\sigma(s)\mathrm{d}W^R(s)\}$$

2 亚式重置期权及定价

定义 2 设期权的敲定价格为 K，令 $G_T=\exp\{\frac{1}{T}\int_0^T\ln S(t)\mathrm{d}t\}$ 表示到时间 T 为止的股票价格的几何平均值，则亚式重置看涨期权在到期日 T 的收益为：

$$V(C,T)=\begin{cases}S_T-G_T,G_T<k,S_T\geqslant G_T\\ S_T-K,G_T\geqslant K,S_T>K\end{cases}$$

亚式重置期权的经济解释即为，若在 $[0,T]$ 内标的资产价格的几何平均值小于 K，则重置期权的敲定价为 G_T，否则不重置期权的敲定价.

定理 3 标的资产价格在指数 O－U 过程模型(2)下，期权的敲定价格为 K，到期日为 T 的亚式重置看涨期权的在 $t=0$ 时的价格为：

$$C(T,K)=S_0N(b_1)N(b_2)-e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s+\mu_1(T)+\frac{\sigma_1^2(T)}{2}}\times N(b_3)N(b_4)+S_0N(-b_1,-b_5,\rho)-Ke^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}\times N(-b_7,-b_6,\rho)$$

其中：

$$b_1=\frac{T\ln\frac{K}{S_0}-\int_0^T(T-s)(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T(T-s)^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$b_2=\frac{\int_0^T s(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T s^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$b_3=\frac{\int_0^T s(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T s^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$b_4=\frac{\ln K-\mu_1(T)-\sigma_1^2(T)}{\sigma_1(T)},$$

$$b_5=\frac{\ln\frac{K}{S_0}-\int_0^T(r(s)+\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$b_6=\frac{\ln\frac{K}{S_0}-\int_0^T(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$b_7=\frac{T\ln\frac{K}{S_0}-\int_0^T(T-s)(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T(T-s)^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$\rho=\frac{\sqrt{\int_0^T\sigma^2(s)\mathrm{d}s}}{\sqrt{\int_0^T s^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}},$$

$$\mu_1(T)=\ln S_0+\frac{1}{T}\int_0^T(T-s)(r(s)-\frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s,$$

$$\sigma_1^2(T) = \frac{1}{T^2}\int_0^T (T-s)^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s$$

证明: $C(T,K) = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}V(C,T)) = V_1 + V_2$,其中:

$V_1 = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}(S_T - G_T) \mid G_T < K, S_T > G_T)P^Q(G_T < K, S_T > G_T) = A_1 - B_1$

$V_2 = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}(S_T - K) \mid G_T \geqslant K, S_T > K)P^Q(G_T \geqslant K, S_T > K) = A_2 - B_2$

$$A_1 = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}S_T \mid G_T < K, S_T > G_T) \times P^Q(G_T < K, S_T > G_T)$$
$$= E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}\frac{S_T}{S_0}S_0 \mid G_T < K, S_T > G_T) \times P^Q(G_T < K, S_T > G_T)$$
$$= S_0 P^R(G_T < K)P^R(S_T > G_T)$$

$$P^R(S_T > G_T) = P^R(\ln S_T > \ln G_T)$$
$$= P^R(\int_0^T (r(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s + \int_0^T \sigma(s)\mathrm{d}W^R(s) > \frac{1}{T}\int_0^T (T-s)(r(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{T}\int_0^T (T-s)\sigma(s)\mathrm{d}W^R(s)) = P^R(\frac{\int_0^T s\sigma(s)\mathrm{d}W^R(s)}{\sqrt{\int_0^T s^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}} > \frac{-\int_0^T s(r(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s}{\sqrt{\int_0^T s^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s}}) = N(b_2)$$

$$P^R(G_T < K) = P^R(\int_0^T (T-s)(r(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s + \int_0^T (T-s)\sigma(s)\mathrm{d}W^R(s) < T\ln\frac{K}{S_0}) = N(b_1)$$

$$B_1 = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}G_T \mid G_T < K, S_T > G_T) \times P^Q(G_T < K, S_T > G_T)$$
$$= e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}E^Q(G_T I_{\{G_T<K\}})P^Q(S_T > G_T)$$
$$= e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}E^Q(G_T I_{\{G_T<K\}})N(b_3)$$

而:$E^Q(G_T I_{\{G_T<K\}}) = \int_{-\infty}^K x f_{G_T}(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\ln k} e^y \times f_{G_T}(e^y)e^y\mathrm{d}y$

其中:$f_{G_T}(x)$ 是 G_T 在测度 Q 下的密度函数,在测度 Q 下,$\ln G_t \sim N(\mu_1(t), \sigma_1^2(t))$,

且:$\mu_1(t) = E(\ln G_t) = E(\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u \mathrm{d}u) = \ln S_0 + \frac{1}{t}\int_0^t (t-s)(r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s$

$\sigma_1^2(t) = Var(\ln G_t) = E\left[\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u\mathrm{d}u - E(\frac{1}{t}\int_0^t \ln S_u\mathrm{d}u)\right]^2 = \frac{1}{t^2}E\{\int_0^t(\ln S_t - \ln S_0 - \int_0^u (r(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s))\mathrm{d}s)\mathrm{d}u\} = \frac{1}{t^2}\int_0^t (t-s)^2\sigma^2(s)\mathrm{d}s$

故 $F_{\ln G_T}(y) = P(\ln G_T < y) = P(G_T < e^y) = F_{G_T}(e^y)$,$f_{\ln G_T}(y) = F'_{\ln G_T}(y) = f_{G_T}(e^y)e^y$

所以 $\int_{-\infty}^{\ln k} e^y f_{G_T}(e^y)e^y\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\ln k} e^y f_{\ln G_T}(y)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\ln k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(T)}\exp\{-\frac{(y-\mu_1(T))^2}{2\sigma_1^2(T)}\}e^y\mathrm{d}y = e^{\mu_1(T)+\frac{\sigma_1^2(T)}{2}} \times \int_{-\infty}^{\ln k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1(T)}\exp\{-\frac{(y-\mu_1(T)-\sigma_1^2(T))^2}{2\sigma_1^2(T)}\}\mathrm{d}y = N(b_4)e^{\mu_1(T)+\frac{\sigma_1^2(T)}{2}}$

由上即求出 A_1, B_1,下面计算 A_2, B_2. 根据上面的计算结果,容易得到:

$A_2 = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}S_T \mid G_T \geqslant K, S_T > K)P^Q(G_T \geqslant K, S_T > K) = S_0 N(-b_1, -b_5, \rho)$

$B_2 = E^Q(e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}K \mid G_T \geqslant K, S_T > K)P^Q(G_T \geqslant K, S_T > K) = Ke^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}N(-b_7, -b_6, \rho)$

至此,定理已经证明完毕.

同样,可以定义亚式重置看跌期权:设期权的敲定价格为 K,令 $G_T = \exp\{\frac{1}{T}\int_0^T \ln S(t)\mathrm{d}t\}$ 表示到时间 T 为止的股票价格的几何平均值,则亚式重置看跌期权在到期日 T 的收益为:

$$P(C,T) = \begin{cases} K - S_T, G_T < K, K > S_T \\ G_T - S_T, G_T \geqslant K, G_T > S_T \end{cases}$$

推论 4　标的资产价格在指数 O-U 过程模型(2)下,期权的敲定价格为 K,到期日为 T 的亚式重置看跌期权的在 $t = 0$ 时的价格为:

$$P(T,K) = -S_0N(-b_1)N(-b_2) + e^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s + \mu_1(T) + \frac{\sigma_1^2(T)}{2}}N(-b_3)N(-b_4) - S_0N(b_1, b_5, \rho) + Ke^{-\int_0^T r(s)\mathrm{d}s}N(b_7, b_6, \rho)$$

参考文献:

[1] 杜雪樵,唐玲. 亚式期权定价中的鞅方法[J]. 合肥工业大学学报,2005,28(2):206-208.

[2] 许永庆,李时银. 跳跃扩散型重设卖出期权的定价公式[J]. 厦门大学学报,2005,44(1):20-23.

(下转第 54 页)

(上接第 51 页)
[3] 欧辉,向绪言,杨向群.重置期权的创新及其在随机利率下的定价[J].湖南文理学院学报,2004,16(3):6-10.
[4] 章珂,周文彪,沈荣芳.几何平均亚式期权的定价方法[J].同济大学学报,2001,29(8):924-927.
[5] 姜礼尚.期权定价的数学模型和方法[M].北京:高等教育出版社,2003.
[6] 黄志远.随机分析学基础[M].3 版.北京:科学出版社,2001.