

文章编号:1673-0062(2011)02-0045-04

重物落水后运动过程的数学模型分析

王光菊, 吁 锤, 廖新元*

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘要:针对封堵溃口问题,根据流体力学理论,建立了重物落水后运动过程的数学模型,利用小型试验获取相关数据的方法进行研究,用该模型对实验的工况进行了计算,并对模型和实验进行了分析和评价.通过实例,验证了该模型较好地模拟了大坝溃决后的重物落水后的运动过程,模型结果可以为溃坝洪水风险提供科学依据.

关键词:运动方程;粘滞阻力;二分法;模型试验

中图分类号: O35 **文献标识码:** A

Model Analysis of Movement Process of Weights into Water

WANG Guang-ju, YU Chui, LIAO Xin-yuan*

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, a mathematical model for the dam failure with the weights into water was established by the fluid dynamics theory. The model was applied to the small-scale test by which we obtained relevant data. The model simulated the movement process of weights into water, according to comparison between the calculated value and measured data. This model can provide a scientific foundation for the risk of dam break flood.

key words: equation of motion; viscous resistance; dichotomy; model test

0 引 言

我国经常发生洪水,溃坝溃堤进而引发泥石流灾害造成国家和人民生命财产的严重损失.因此开展溃口封堵技术研究,寻找快速有效的封堵技术尤为必要.例如,1996年8月河北省漳沱河堤防溃决以及1998年长江九江大堤的溃决等(见文献[1]).目前描述溃坝水流的数学模型,应用了速度沿水深均匀分布、静压假定、液体内粘性摩

擦力不计、忽略科氏力及风应力等假设(见文献[2]).文献[3]建立了二维溃坝水流数学模型,采用基于非结构网格的有限体积法对控制方程进行离散,采用中心格式把变量布置在网格单元的形心.对具有复杂陡峭地形 Malpasset 大坝溃决水流运动进行了模拟.对于溃坝相关应急技术及数值模拟详见文献[4-5],利用直升飞机投放堵口组件,不仅能显著提高溃口抢险的快速反应能力,而且容易解决溃口交通不便、堵口物资缺乏等问题.

收稿日期:2011-03-21

作者简介:王光菊(1987-),女,福建宁德人,南华大学数理学院硕士研究生.主要研究方向:微分方程与动力系统.

* 通信作者.

如2005年8月,美国陆军工程师团针对新奥尔良第17大街运河的防洪堤坝缺口展开修补行动时动用直升飞机向缺口处投放砂袋,终于在几日后成功封住了缺口.本文基于已有的研究基础,根据流体力学理论,考虑水的粘滞系数,建立了重物落水后的数学模型.

1 数学模型的建立

1.1 建模分析

溃口的情况因受诸多因素的影响而变化无常,并随着时间的变化不断的出现新的变化.假如过多地考虑水流速度、流量大小的变化和溃口形状等因素,那么会使得数学模型变得相当复杂而不能更形象更准确的用数学模型优化的表达出来.所以,只有在简单的情况下,通过固定一些因素,只让主要因素发挥作用,才能更好的把握重物在水中的运动过程.因此,我们作如下假设:重物落底即稳定;重物在空中下落过程为自由落体运动;忽略空气阻力且在投放石头时,飞机处于静止状态;考虑水的动力粘滞系数与温度有关,假设在常温下;重物在水中所受摩擦力与相对速度成正比.为了尽可能准确地描述重物在入水后的运动规律.我们的建模思路,大致分为以下几个步骤:

1)空中过程:在重物从直升飞机到恰接触水面的过程为自由落体,由重物落水高度可求得恰接触水面时初始速度 v_{0-} ;

2)击水过程:这一瞬间过程由于水的粘滞力、表面张力和水流在水平方向对重物的冲量以及水面在垂直方向上对重物的反冲量等因素相当复杂,因此我们引入参数 λ 来说明这一过程的速度变化,即 $v_{0+} = \lambda v_{0-}$;

3)落水后过程:假设重物在水中受重力、浮力及流体摩擦力作用(其中流体摩擦力假设与重物和流体的相对速度成正比),根据牛顿第二定律,建立了重物落水后运动方程,通过位移和速度的初始条件,求解重物在水中的位移与时间的关系表达式;

(4)根据上述表达式由重物重心在水面投放的实验数据求得各种不同形状、大小的重物的流体摩擦力系数;通过水面投放重物的数据,求得参数 k (流体阻力系数)值和 λ 值.

1.2 模型建立

我们考虑重物在水中受重力、浮力及流体的摩擦力作用.假设流体摩擦力与相对速度成正比,与流体粘性系数 μ 成正比,并与重物的形状大小有关(见文献[6]).由牛顿第二定律,可建立重物

在落水后的运动方程

$$\begin{cases} \rho V \frac{d^2 x}{dt^2} = k V \mu \left(u_0 - \frac{dx}{dt} \right) \\ \rho V \frac{d^2 y}{dt^2} = \rho V g - \rho_0 V g - k V \mu \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

其中 ρ , ρ_0 分别为重物的密度和水的密度, V 为重物的体积, k 为流体阻力系数.

解方程(1),得:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2 e^{-\frac{k\mu}{\rho}t} + u_0 t \\ y(t) = c_3 + c_4 e^{-\frac{k\mu}{\rho}t} + \frac{(\rho - \rho_0)g}{k\mu} t \end{cases} \quad (2)$$

其中 c_1 , c_2 , c_3 , c_4 由初始条件确定的常数.

满足初始条件: $x(0) = y(0) = 0$, $\frac{dx(0)}{dt} = 0$,

$\frac{dy(0)}{dt} = v_{0+}$ 的解为

$$\begin{cases} x(t) = u_0 \left[\frac{\rho}{k\mu} (e^{-\frac{k\mu}{\rho}t} - 1) + t \right] \\ y(t) = \frac{(\rho - \rho_0)g}{k\mu} \left[\frac{\rho}{k\mu} (e^{-\frac{k\mu}{\rho}t} - 1) + t \right] - \frac{\rho}{k\mu} (e^{-\frac{k\mu}{\rho}t} - 1) v_{0+} \end{cases} \quad (3)$$

当 $v_{0+} = 0$ 时(即重物重心在水面投放),把两式相除得到重物的轨迹方程为

$$y(t) = \frac{(\rho - \rho_0)g}{k\mu u_0} x(t). \quad (4)$$

2 模型的验证与初步应用

2.1 小型试验数据处理

基于2010年全国研究生数学建模B题所提供的小型试验数据,我们对数据进行处理.根据光的折射定律等几何光学理论,将玻璃网格上的读数值换算成了重物重心的实际坐标值.我们可以利用 Matlab 编写程序对数据进行处理(见文献[7]),把玻璃网格上的读数值换算成了重物重心的实际坐标值.

2.2 模型参数确定

1)求 k 值

由式(4),解得

$$k = \frac{x(t)(\rho - \rho_0)g}{y(t)\mu u_0}.$$

根据已经处理好的实际坐标值,利用 Matlab 可求得不同形状、大小试块在不同放置方式下的流体阻力系数 k 值(如表1).

表 1 不同形状、大小试块在不同放置方式下的流体阻力系数 k 值(单位: m^{-2})

Table 1 The fluid resistance coefficient k value of the different shapes and placed blocks (unit: m^{-2})

试块形状	放置方式	$0.34/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$0.4/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	$0.55/\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	平均值
空心方体	平放	29 197 573	22 127 716	27 068 836	26 131 375
空心方体	竖放	24 010 159	15 779 360	20 692 514	20 160 677
空心方体	立放	22 452 613	24 033 585	20 718 854	22 401 684
空心蜂巢	平放	31 810 373	25 997 597	25 184 436	27 664 135
空心蜂巢	竖放	24 129 944	15 600 461	17 670 463	19 133 622
空心蜂巢	立放	24 129 944	26 008 297	24 391 882	30 089 695
实心方体	平放	27 106 060	25 023 115	29 985 095	27 371 423
实心方体	竖放	22 778 290	17 146 122	21 547 275	20 490 562
实心方体	立放	31 197 909	27 775 441	20 795 468	26 589 606
实心蜂巢	平放	31 444 757	22 943 565	25 817 910	26 735 410
实心蜂巢	竖放	15 904 994	11 534 305	15 917 504	14 452 267
实心蜂巢	立放	30 930 287	30 669 115	22 931 352	28 176 918

2) 求 v_{0+} 值;由式(3)通过使用二分法见文献 [8] 及 Matlab 编程,求得 v_{0+} 值(如表 2)。

由 k 、 v_{0+} 值,就可以求出重物在水中运动过程的数学模型。

表 2 不同试块在不同放置方式和流速下从不同高度落入水中击水后的速度 v_{0+} 值(单位:米/秒)

Table 2 The initial velocity value after hitting water in the different shapes blocks and different placed ways and heights (unit: m/s)

流速(高度)	放置方式	34(5)	34(12)	40(5)	40(12)	55(5)	55(12)
空心方体	平放	0.123 322	0.327 789	0.410 44	0.548 621	0.441 508	0.442 329
空心方体	竖放	0.072 979	0.313 554	0.493 415	0.519 238	-0.007 99	0.616 600
空心方体	立放	0.298 620	0.295 689	0.612 045	-0.023 28	0.468 543	0.400 871
空心蜂巢	平放	-0.092 08	0.114 927	0.473 609	0.416 731	0.099 962	0.239 950
空心蜂巢	竖放	0.406 437	0.410 864	0.339 953	0.405 669	0.411 667	0.608 913
空心蜂巢	立放	0.841 708	0.595 165	-0.306 46	1.160 028	0.371 083	0.719 388
实心方体	平放	0.192 099	0.376 677	0.369 601	0.384 934	0.616 246	0.467 483
实心方体	竖放	0.376 493	0.489 060	0.571 407	0.263 826	0.824 236	0.301 894
实心方体	立放	0.350 442	0.779 801	0.632 017	0.480 119	0.837 846	0.797 041
实心蜂巢	平放	0.525 012	0.593 076	0.492 08	0.638 372	0.628 557	0.463 882
实心蜂巢	竖放	0.162 764	-0.051 51	0.342 337	0.199 526	0.399 909	-0.133 77
实心蜂巢	立放	0.403 449	-0.281 25	0.005 501	0.737 748	0.339 808	-0.133 77

2.3 利用小型试验数据,验证了模型的精确度相当高

当 $v_{0+} = 0$ 时,即重物重心在水面投放,由式知式(4)重物落水后的运动轨迹为直线,与利用 Matlab 数据模拟所得的(如图 1)的结果基本上是一致的。

当 $v_{0+} \neq 0$ 时,即重物在不同高度投放时,落水后运动过程的初始速度离散性较大,甚至出现个别负值情况(如表 2),可能是部分实验数据误差较大所致。

2.4 模型的初步应用

假定溃口几何形状及水流速度与小型试验相似,溃口水深分别为 3 m 和 4 m,溃口流速为 4 m/s 和 5 m/s,若重物重量为 1.5 t,根据所建立的数学模型求解距离水面 2 m 投放重物时,应分别提前多远投放才能使重物沉底到预定位置?

首先我们先求出不同试块阻力系数(如表 3)及不同形状试块的体积(如表 4)。

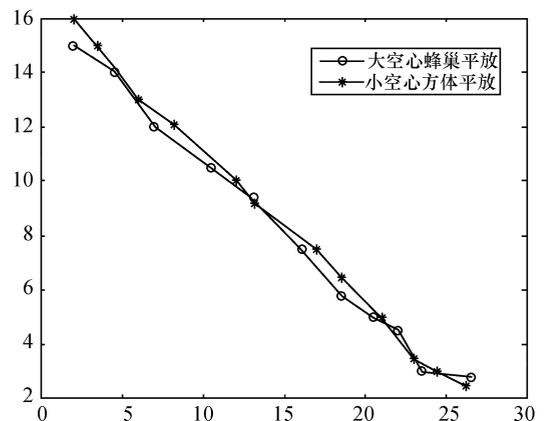


图 1 部分试块在模型实验中的运动轨迹

Fig. 1 The movement trajectory of some blocks

表3 试块尺寸对流体阻力系数 k 值的影响Table 3 The influence of blocks with different sizes on the fluid resistance coefficient k value

试块形状	放置方式	k 值(m^{-2})	比值
空心方体	平放	26 385 251	1.386 962
空心方体	竖放	20 727 954	1.448 778
空心方体	立放	22 366 291	1.631 897
空心蜂巢	平放	28 378 520	1.155 694
空心蜂巢	竖放	20 667 994	1.194 726
空心蜂巢	立放	30 040 324	1.311 434
实心方体	平放	26 618 004	1.450 032
实心方体	竖放	19 773 943	1.550 183
实心方体	立放	27 687 244	1.593 839
实心蜂巢	平放	26 279 680	1.022 715
实心蜂巢	竖放	14 877 773	1.227 040
实心蜂巢	立放	27 185 040	1.123 649

表4 不同形状大试块体积值(单位: 10^{-6}m^3)Table 4 The value of volume in different shapes (unit: 10^{-6}m^3)

形状	实心方砖	空心方砖	实心蜂巢	空心蜂巢
体积	256	192	162.4	113

假设流体摩擦阻力系数与体积的关系为:

$$\frac{k_1}{k_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$$

对于大小两组试块,可求得:

$$\frac{k_1}{k_2} = 1.326, \frac{V_2}{V_1} = 8$$

由此可求得指数:

$$n = 0.136$$

实际重物的体积:

$$V = \frac{1500}{2300} = 0.6522(\text{m}^3).$$

于是可求得实际重物的流体摩擦阻力系数与

体积的关系为: $k = k_2 \left(\frac{V_2}{V}\right)^n = 6.3 \times 10^6 (\text{m}^{-2})$, 取

剩余速度系数为 $\lambda = 0.3$. 重物从 $h = 2 \text{ m}$ 的高度落下, 在溃口水深分别为 3 m 和 4 m , 溃口流速为 4 m/s 和 5 m/s 重物重量为 1.5 t , 距离水面 2 m 投放重物的情况下. 根据本文建立的数学模型求解得到

的重物触底前在水中运动的时间分别为 1.26 s 和 1.62 s , 提前投放距离分别为 1.5 m 和 2.6 m .

3 结 论

基于近年来我国经常发生洪水, 时而发生溃坝溃堤进而引发重大灾害给人民生命安全和财产带来严重的损失. 本文针对封堵溃口问题, 建立了重物落水后运动过程的微分方程数学模型; 根据我们所建立模型, 较为准确地计算出投放重物的高度和距离, 使得重物入水后更加准确地投放到预定设想的位置, 达到及时准确地封堵溃口的目的; 重物重心在水面投放时, 模型预测的运动轨迹为直线, 与实测值吻合较好. 研究表明该数学模型精度较高, 并且具有良好的稳定性, 应用于大坝瞬时溃决后的洪水模拟具有一定的优势和潜力. 该数学模型可以作为大坝瞬时溃决洪水风险分析的工具, 为防洪决策者提供一些有价值的信息.

致谢: 感谢郭长青教授悉心指导!

参考文献:

- [1] Thompson J F. Computational fluid dynamics [M]. New York: McGRAW-HILL International Book Company, 1980.
- [2] 史宏达, 刘臻. 溃坝水流数值模拟研究进展[J]. 水科学进展, 2006, 17(1): 129-135.
- [3] 张大伟, 程晓陶, 黄金池. 大坝瞬时溃决水流数值模拟以 Malpasset 水库为例[J]. 水利水电科技进展, 2009, 29(5): 1-4.
- [4] 吴浩云. 杭嘉湖地区洪水演进水动力学模型研究[J]. 水科学进展, 1998, 3(9): 265-268.
- [5] 李洋, 周孝德, 李红英. 溃坝洪水数值模拟[J]. 东北水利水电, 2006, 269(24): 68-71.
- [6] 谢任之. 溃坝水力学[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1989.
- [7] 王沫然. MATLAB 与科学计算[M]. 北京: 电子工业出版社, 2009.
- [8] 韩中庚. 数学建模方法及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.