文章编号:1673 - 0062(2011)01 - 0067 - 03

重尾索赔下二项风险模型破产概率局部渐近估计

马妮娜,廖基定

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:本文对复合二项风险模型作进一步的研究,给出了在重尾索赔下二项风险模型破产概率局部渐近估计.

关键词:风险模型;重尾索赔;破产概率

中图分类号:O211.67 **文献标识码**:A

Local Asymptotic Evaluation of the Compound Binomial Risk Models in Heavy-tailed Claims

MA Ni-na,LIAO Ji-ding

(School of Mathematics and Physics,University of South China,Hengyang,Hunan 421001,Chin)

Abstract:In this paper,the further investigation into the compound binomial risk models have been done,we obtained its local asymptotic evaluation of the compound binomial risk models in heavy-tailed claims.

key words:risk model;heavy-tailed claim;ruin probability

0 引 言

关于复合二项风险模型的研究,主要是在完全离散情形下进行研究. Gerber[1] 运用鞅论证方法,在破产为盈余资本小于零的定义下得到了破产概率的卷积公式. 成世学和伍彪[2] 研究了保险公司生存到固定时刻 n 并且在此时刻 n 的盈余为某数 $x(x\geqslant 0)$ 的概率的递推公式. 最近几年一些学者对模型进行了一些推广,Hélène Cossette[3] 在马氏环境下进行了研究,得到的依然也是递推解. 张茂军和南江霞[4] 对保费收取过程进行了推广,得到了破产概率的积分方程. Jiyang Tan 和 Xiangqun Yang[5] 在具有随机决策红利的条件下,研究了破产概率以及 Gerber-Shiu 折现惩罚函数的渐近关系. 在完全离散情形下,龚日朝和杨向群[6]、柳向东和杨向群[7] 运用概率母函数和随机过程理论中的相关方法研究并证明了该模型的许多有用的性质,龚日朝和杨向群[8] 在满足安全负荷条件(2)而且调节系数 R 存在的条件下,复合二项风险模型的破产概率所满足的瑕疵更新方程以及类似于经典 Poisson 模型破产概率的 pollazek-khinchin[9] 公式. 本文对复合二项风险模型开展了

收稿日期:2010 - 11 - 28

基金项目:湖南省科技厅软科学基金资助课题(2010ZK3052)

作者简介:马妮娜(1983 -),女,安徽淮北人,南华大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向:应用数学.

进一步研究,得到了在索赔分布服从重尾分布条件下破产概率局部渐近估计.

1 模型描述

假设在保险公司的事务中只在离散时刻 t 赔付并收取保费,在连续时间段 $(t-1,t]$ 中进行的赔付以及收取的保费均视为在时刻进行的. 公司在时刻 t 进行赔付的次数为 ξ_t 服从二点分布:

$P\{\xi_t=1\}=p, P\{\xi_t=0\}=q, \forall t=1,2,\cdots,$ 其中 $p+q=1$. 于是到时刻 t 为止赔付的总次数 $N(t)$ 为

$$N(0)=0, N(t)=\sum_{k=1}^{t}\xi_k, \forall t=1,2,\cdots$$

假设 $\{\xi_t: t=1,2,\cdots\}$ 相互独立,则易见 $\{N(t)\}_{t=0}^{\infty}$ 是参数为 p 的二项随机序列,具有零初值、平稳独立增量性,且具有参数为 p、项数为 t 的二项分布 $B(t,p)$.

定义风险模型

$$U(t)=u+ct-\sum_{i=1}^{N(t)}X_i, \quad t\geqslant 0 \tag{1}$$

在复合二项模型下,定义安全负荷系数为

$$\theta=\frac{c}{p\mu}-1>0. \tag{2}$$

定义 1 (M 族)[11] 如果非负随机变量 X 满足:$EX<\infty$,且

$$\lim_{x\to\infty} r_e(x)=0, \tag{3}$$

则称非负随机变量 X(或者分布 F)属于 M 族,记为 $F\in M$.

在 M 族中有以下以 $[0,\infty)$ 为定义域的与本文有关的重尾分布子族:

L 族:分布 F 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)}=1$,对任意固定的 t(或等价地对 $t=1$)成立.

2 主要引理

引理 2 满足安全负荷条件(2),且 $c=1$ 时,完全离散复合二项模型(1)的破产概率具有如下概率母函数:

$$\hat{\Psi}(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1-p\mu}{1-z-p(1-\hat{f}(z))}, \tag{4}$$

进一步破产概率具有如下类似于经典 Poisson 模型破产概率的 Pollazek-Khinchin 公式:

$$\Psi(x)=(1-p\mu)\sum_{n=0}^{\infty}(p\mu)^n\,\overline{F_e^{*n}}(x), \tag{5}$$

其中 $F_e(x)=\mu^{-1}\sum\limits_{i=0}^{x}\overline{F}(i)$.

本引理证明从略,详可参见文献[9].

引理 3 设 X 是取值于正整数集的随机变量,分布密度为 $f(x)$, $x=1,2,\cdots$,分布函数 $F(x)=\sum_{i=1}^{[x]}f(i)$, $x\in R$, W 是 $[0,\infty)$ 上的某分布函数,使得对于每一个 $z>0$, $W(x,x+z]\sim\theta z\overline{F}(x)$,则

$$(W*F_e)(x,x+z]\sim\left(\theta+\frac{1}{\mu}\right)z\overline{F}(x), \forall z>0. \tag{6}$$

证明:反复利用 $F\in L$(定义见定义 1 L 族),对 $\forall 0<A<\dfrac{x}{2}$,

记

$$\begin{aligned}&(W*F_e)(x,x+z]\\&=\Big(\sum_{i=0}^{[A]}+\sum_{i=[A]+1}^{[x-A]}+\sum_{i=[x-A]+1}^{[x+z]}\Big)\times\\&\quad W(x-i,x+z-i)f_e(i)\\&\equiv I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

由于 $W(x,x+z)\sim\theta z\overline{F}(x)$,故

$$\begin{aligned}I_1&=\sum_{i=0}^{[A]}w(x-i,x+z-i)f_e(i)\sim\\&\sum_{i=0}^{[A]}z\overline{F}(x-i)f_e(i)\\&=\sum_{i=0}^{[A]}\theta z\overline{F}(x)f_e(i)\cdot\frac{\overline{F}(x-i)}{\overline{F}(x)}\sim\\&\theta z\overline{F}(x)F_e(A).\end{aligned} \tag{7}$$

对于 I_2:由于 $W(x,x+z)\sim\theta z\overline{F}(x)$,故 $\forall\varepsilon>0$,当 A 充分大后,对一切 $A\leqslant t\leqslant x-A$,一致有

$$W(x-t,x+z-t)\leqslant(1+\varepsilon)\theta\overline{F}(x-t).$$

从而

$$\begin{aligned}I_2&=\sum_{i=[A]+1}^{[x-A]}W(x-i,x+z-i]f_e(i),\\&\leqslant\sum_{i=[A]+1}^{[x-A]}(1+\varepsilon)\theta z\overline{F}(x-i)f_e(i).\end{aligned} \tag{8}$$

由于易证

$$\lim_{A\to\infty}\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{i=[A]+1}^{[x-A]}\overline{F}(x-i)f_e(i)}{\overline{F}(x)}=0.$$

故

$$\lim_{A\to\infty}\lim_{x\to\infty}\sup\frac{I_2}{\overline{F}(x)}=0.$$

对于 I_3:

$$\begin{aligned}I_3&=F_e(x,x+z]+\sum_{i=[x-A]+1}^{[x]}W(x-i,x+z-i]\times\\&\quad f_e(i)-\sum_{i=[x]+1}^{[x+z]}\overline{W}(x+z-i)f_e(i)\\&=I_4+I_5+I_6.\end{aligned}$$

其中易证

$$\lim_{A\to\infty}\limsup_{x\to\infty}\frac{|I_5-I_6|}{z\overline{F}(x)}=0,$$

故可得

$$\lim_{A\to\infty}\limsup_{x\to\infty}\frac{I_3}{z\overline{F}(x)}=\lim_{A\to\infty}\limsup_{x\to\infty}\frac{F_e(x,x+z]}{z\overline{F}(x)}=\frac{z}{\mu}.\qquad(9)$$

综合以上式(7)、式(8)、式(9),引理结论成立.

引理 4　设 $F\in S^*$,则对 $\forall z>0$ 和 $\forall n\in N$,有

$$F_e^{*n}(x,x+z]\sim\frac{nz}{\mu}\overline{F}(x).\qquad(10)$$

该引理的证明参见文献[10].

引理 5　设 $F\in S^*$,则对任意固定 $z>0$ 和任意 $\varepsilon>0$,存在常数 $C'=C'(z,\varepsilon)>0$,对一切 $n\in N$ 和一切 $x>0$,有

$$F_e^{*n}(x,x+z]\leqslant C'(1+\varepsilon)^n\overline{F}(x).\qquad(11)$$

证明:运用引理 2 以及文献[10]引理的证明思路,很容易得证.

记

$$R(x,x+z]\hat{=}\psi(x)-\psi(x+z)\qquad(12)$$

称之为破产概率的局部解.

3　定理及证明

定理 6　满足安全负荷条件(2)且 $c=1$ 时的完全离散复合二项模型(1)的破产概率具有如下局部渐近解

$$R(x,x+z]\sim\frac{z}{\mu\rho}\overline{F}(x),\ \forall z>0.\qquad(13)$$

证明:根据引理 2,有

$$\begin{aligned}R(x,x+z]&\hat{=}\psi(x)-\psi(x+z)\\&=(1-p\mu)\sum_{n=0}^{\infty}(p\mu)^n\times\left(\overline{F_e^{*n}}(x)-\overline{F_e^{*n}}(x+z)\right)\\&=(1-p\mu)\sum_{n=0}^{\infty}(p\mu)^nF_e^{*n}(x,x+z]\end{aligned}$$

根据引理 4,可以运用控制收敛原理,得到

$$\lim_{x\to\infty}\frac{R(x,x+z]}{\overline{F}(x)}=(1-p\mu)\sum_{n=0}^{\infty}(p\mu)^n\lim_{x\to\infty}\frac{F_e^{*n}(x,x+z]}{\overline{F}(x)},$$

再根据引理 3,得到

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{R(x,x+z]}{\overline{F}(x)}\\&=(1-p\mu)\sum_{n=0}^{\infty}(p\mu)^n\lim_{x\to\infty}\frac{F_e^{*n}(x,x+z]}{\overline{F}(x)}\\&=\frac{z(1-p\mu)}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}n(p\mu)^n=\frac{z}{\mu p}\end{aligned}$$

定理证毕.

参考文献:

[1] Gerber H U. Mathematical fun with the compound binomial process[J]. Astin Bulletin,1988,18:161-168.

[2] Cheng Shixue,Wu Biao. The survival probability in finite time period in fully discrete risk model[J]. Appl. Math-JCU,1999,14(1):67-74.

[3] Hélène Cossette. Compound binomial risk model in a markovian environment[J]. Insurance:Mathematics and Economics,2004,35:425-443.

[4] 张茂军,南江霞. 保费随机的复合二项风险模型的破产概率[J]. 科技通报,2005,21(3):367-371.

[5] Jiyang Tan, Xiangqun Yang. The compound binomial model with randomized decisions on paying dividends [J]. Insurance:Mathematics and Economics,2006,39:1-18.

[6] 龚日朝,杨向群. 复合二项风险模型的破产概率[J]. 经济数学,2001,18(2):38-42.

[7] 柳向东,杨向群. 两类离散风险模型的等价性[J]. 湖南师范大学学报,2001,24(4):1-5.

[8] Liu Taisheng. A laplace transformation method for evaluation of the ruin probability for risk model with diffusion [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis,2000,33(4):105-108.

[9] 龚日朝. 几类风险模型破产概率及其渐近解研究[D]. 长沙:中南大学,2007.

[10] 唐启鹤. 重尾索赔下关于破产概率的一个等价式[J]. 中国科学:A 辑,2002,32(3):260-266.

[11] 苏淳,胡治水,唐启鹤. 关于非负分布重尾程度的刻画[J]. 数学进展,2003,32(5):606-614.