文章编号: 1673- 0062(2010) 02- 0074- 02

带双井势函数的一维 p- Laplace方程解的存在性

周　斌, 何　丹

(湖南工学院 基础课部, 湖南 衡阳 421002)

摘　要: 研究了一类带双井势函数的一维 p- Laplace方程解的存在性, 并用微积分的方法以及变分的方法给出方程解的唯一存在性证明.

关键词: p- Laplace; 双井势函数; 变分法
中图分类号: O24　　文献标识码: A

The Existence of the Solution to a Class of One- dimensional Equation with Double Well Potential

ZHOU Bin, HE Dan
(Fundamental Courses Teaching Department of Hunan Institute of Technology, Hengyang Hunan 421002, China)

Abstract: In this paper we discuss the existence of the solution to a class of One- dimensional p- Laplace Equation with Double Well Potential, and use calculus method and variational method to prove the existence and uniqueness of the solution to the problem.

Key words: p- Laplace; Double well potential equation; variational method

Allen- Cahn 方程是一个著名的两相过渡模型, 对于一维的 Allen- Cahn方程多层解的相关性态, Kimie Nakashima在文中[1- 2]已经给出了详尽的讨论.

本文是 Allen- Cahn方程的一个推广, 将 Allen- Cahn方程中的 Laplace算子换成 p- Laplace算子后, 同样可以得到许多相应的结论. 本文着重讨论的是用微积分的办法和变分的办法得到下列问题解的存在唯一性, 即

$$\begin{cases} (|u'(t)|^{p-2}u'(t))' - F'(u) = 0,\ t\in R, \\ u(0) = 0, \\ \lim\limits_{t\to\pm\infty} u(t) = \pm 1 \end{cases} \qquad (1)$$

其中, $F(u) = (1-u^2)^p$, 且 $p > 2$, $u\in W^{1,p}(R)$, 并且满足 $u'(0) > 0$(或 $u'(0) < 0$).

1　直接法得解的唯一存在性

定理 1: 若 $F(u)$为双井势函数, 当 $u'(t)\neq 0$, $u'(0) > 0$(或 $u'(0) < 0$)时, 式(1)存在一个唯一解.

证明: 可以选择一个 $u(t)$, 使得 $u(0) = 0$,并且满足 $u'(0) > 0$,且 $u'(t)\neq 0$ 若 $u(t)$ 满足式(1), 可令 $\rho(t) = \frac{p-1}{p}|u'(t)|^p - F(u(t))$, 则

$\rho'(t) = [(p-1)|u'(t)|^{p-2}u''(t) - F'(u(t))]\cdot u'(t) = [\triangle_p u(t) - F'(u(t))]u'(t) = 0$

收稿日期: 2010- 03- 29
作者简介: 周　斌 (1979-), 男, 湖南衡阳人, 湖南工学院基础课部讲师, 硕士. 主要研究方向: 应用数学.

因此, $\rho(t) = C$, $t\in R$. 所以

$$\frac{p-1}{p}|u'(t)|^p \equiv F(u(t)),\ t\in R \qquad (2)$$

下面可以证明 $|u(t)| < 1$, $t\in R$.

假设 $|u(t)| < 1$不成立, 则存在 $t_0\in R$, 使得 $|u(t_0)| = 1$, 或者存在 $t_1\in R$, 使得 $|u(t_1)| > 1$. 当 $|u(t_0)| = 1$时, 不妨设 $u(t_0) = 1$. 若 $u(t_0) = 1$, 由式(2)可知 $u'(t_0) = 0$, 这与 $u'(t)\neq 0$矛盾. 当 $|u(t_1)| > 1$时, 不妨设 $u(t_1) > 1$. 由介值定理知必存在 $t_2\in R$, 使得 $1 < u(t_2) < u(t_1)$. 又由 $\lim_{t\to\pm\infty}u(t) = 1$及中值定理可知, 存在 ξ 使得 $u'(\xi) = 0$, 这与已知矛盾.

接下来还可以证明 $u'(t) > 0$, $t\in R$. 由 $u'(0) > 0$可知, 存在 $t_1\in R$, 使得 $u'(t_1) > 0$. 因为 $u'(t)\neq 0$, 故由连续性及介值定理可知必不会存在 $t\in R$, 使得 $u'(t) < 0$. 因此 $u'(t) > 0$, $t\in R$. 所以, 由式(2)可得

$$u'(t) = \left(\frac{p}{p-1}F(u(t))\right)^{\frac{1}{p}},\ t\in R.$$

因此有

$$\int_0^x \frac{u'(t)}{(F(u(t)))^{\frac{1}{p}}}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}t,$$

从而可得

$$u(x) = \frac{e^{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}2x} - 1}{e^{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}2x} + 1},\ x\in R.$$

这就证明了式(1)解的唯一存在性. 显然, 当 $u'(0) < 0$时, 同理可证式(1)解的唯一存在性.

2　变分法得解的唯一存在性

考虑泛函 $E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{p}|u'|^p + (1-u^2)^p\,\mathrm{d}t$, $u\in W^{1,p}_{loc}(R)\cap C(R)$. (3)

定义一个 $W^{1,p}_{loc}(R)$上的特殊子集 $H = H_\Phi = \{u\in W^{1,p}(R) + \Phi\}\cap C(R)$, 其中

$$\Phi(t) = \begin{cases} t & |t| < 1, \\ 1, & t\geqslant 1, \\ -1, & t\leqslant -1 \end{cases}$$

则 $E(u)$ 的临界点即为式(1)的解. 再定义 $\|u\|_H = \|u-\Phi\|_{W^{1,p}(R)}$, $u\in H$, 此时

$$E(u) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{P}|u'|^p + (1-u^2)^p\right)\mathrm{d}t \geqslant \int_R |u'|\cdot\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}(1-u^2)^{p-1}\mathrm{d}t > 0,$$

从而可知$E(u)$有下界. 令 $e = e_F = \min_{u\in H}E(u) > 0$, 则有下列定理成立.

定理 2 存在 $E(u)$的一个极小化子 $g(t)\in H$, 使得 $g(0) = 0$, $E(g(t)) = e$, 且 $g(t)$满足泛函(3)的欧拉-拉格朗日方程式(1).

证明: 假设 $\{u_n\}\subset H$ 为 $E(u)$的一个极小化序列, 由 $E(u)$的平移不变性及 $F(u)$在 ± 1处取得极小值, 可假设 $u_n(0) = 0$, 且 $|u_n(t)|\leqslant 1$, $t\in R$. 实际上可将 $\{u_n\}$ 取成如下形式

$$\begin{cases} -1\leqslant u_n < 0, & t < 0 \\ u_n(t) = 0, & t = 0 \\ 0 < u_n(t)\leqslant 1, & t > 0 \end{cases}$$

其中, $u_n(t)$单调递增. 事实上, 若存在 $u_n'(t) < 0$, $t\in(t_1, t_0)$, 可采用切割、粘合的办法, 将 $\{u_n\}$选择成一个关于 t的单增函数列.

记 $u_n(t) = v_n(t) + \Phi(t)$, 其中 $v_n(t)\in W^{1,p}(R)$, 下面将证明 $u_n(t)$在 H上是有界的.

因为 $|u_n(t)|\leqslant 1$, $t\in R$, 而 $F(u_n) = (1-u_n^2)^p$, 故存在 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$使得

$$F(u_n) \geqslant \begin{cases} \lambda_1(u_n+1)^p, & u_n\in(-1, 0), \\ \lambda_2(1-u_n)^p, & u_n\in(0, 1), \end{cases}$$

因此有

$$\int_R F(u_n(t))\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1}F(u_n)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0}F(u_n)\mathrm{d}t + \int_0^1 F(u_n)\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}F(u_n)\mathrm{d}t \geqslant \int_{-\infty}^{-1}\lambda_1|v_n|^p\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0}\lambda_1|v_n|^p\mathrm{d}t + \int_0^1\lambda_2|-v_n|^p\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\lambda_2|v_n|^p\mathrm{d}t \geqslant \int_{-\infty}^{+\infty}|v_n|^p\mathrm{d}t + C,$$

其中, $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\} > 0$, C为一常数.

因此

$$E(u_n(t)) \geqslant \int_R\frac{1}{p}|u'_n(t)|^p\mathrm{d}t + \lambda\int_R|v_n(t)|^p\mathrm{d}t \geqslant \tilde{\lambda}\|v_n(t)\|_{W^{1,p}(R)} = \tilde{\lambda}\|u_n(t)\|_H$$

其中, $\tilde{\lambda} = \min\{\frac{1}{P}, \lambda\} > 0$. 又因为$\{u_n(t)\}$为极小化序列, 并且 $E(u_n(t))$有下界, 故 $E(u_n(t))$有界. 从而 $\|u_n(t)\|_H\leqslant C$, 其中 C为一常数.

接下来证明$\{u_n(t)\}$的紧性. 对任意的 $t_1 < t_2$, 有

$$|u_n(t_1) - u_n(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2}u'_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (t_1-t_2)^{\frac{p-1}{p}}\|u_n\|_H \leqslant C(t_1-t_2)^{\frac{p-1}{p}},$$

$$|u_n^2(t_1) - u_n^2(t_2)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2}2u'_n(t)u_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant 2C_1\left(\int_{t_1}^{t_2}|u'_n(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\int_{t_1}^{t_2}|u'_n(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2\|u_n(t)\|_H^2$$

(下转第 80页)

该结果与实际情况相符合.

4 结论

结合大批量定制环境下产品配置的特点,以客户为评价主体,选择了评价指标,建立了产品配置方案的综合评价体系结构.建立了分层的评价模型,引入模糊集的概念,用于解决用户在对指标重要性进行评价时容易产生混淆的问题,并使用语意变量的方法来获取用户的评价意图.采用了模糊层次分析法对配置方案进行建模和计算,用来选出用户最满意的产品配置方案.以自行车的配置方案评价为实例进行了分析,说明了对配置方案进行综合评价的过程,验证了评价方法的可行性,以及评价模型的合理性.

参考文献:

[1] 秦寿康. 综合评价原理与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003.

[2] 魏晓鸣. 面向客户的产品族模型理论与方法研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2006.

[3] 袁长峰. 产品需求分析与配置设计研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2005.

[4] 杜 栋, 庞庆华. 现代综合评价方法与案例精选[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[5] Buckley J J. Fuzzy Hierarchical Analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985(17): 233-247.

[6] 宋保维, 李彩霞, 毛昭勇, 等. 并联系统可靠性分配的模糊层次分析法[J]. 火力与指挥控制, 2009, 34(12): 151-159.

[7] 杨文红. 运用模糊层次分析法进行桥梁可靠性评估[J]. 国防交通工程与技术, 2010(1): 68-70.

[8] 蒋云霞, 刘冬荣, 肖华茂. 基于三角模糊层次分析法的产业集群综合绩效的测评[J]. 统计与决策, 2010(2): 31-33.

[9] 朱铎辉, 吴志军, 张玉峰. 基于层次分析法的供应商评价模型的研究[J]. 计算机应用研究, 2004(6): 91-96.

[10] 汪仲祥. 模糊层级分析法应用于IC产业政策选取之研究[D]. 台湾: 国立中山大学, 2003.

(上接第75页)

由 $u_n(0)=0$, 可知 $\|u_n(t)\|_{L^\infty(R)} \leqslant \sqrt{C_2}\|u_n(t)\|_H$. 由 Arzela-Ascoli定理知, 存在 $\{u_n(t)\}$ 的一个子列 $\{u_{n_k}(t)\}$, 使得在 H 内有 $u_{n_k} \xrightarrow{弱} g(t)$; $(k \to \infty)$. 因此 $g(0)=0$, 并且当 $t \geqslant 0$ 时, 有 $g(t) \geqslant 0$, 当 $t \leqslant 0$ 时, 有 $g(t) \leqslant 0$, 并且 $g(t)$ 为单增的. 实际上, 用切割粘合的办法可以保证 $g(t)$ 对 t 是单增的. 从而 $E(g) \geqslant \min_{u\in H} E(u) = e$.

又知 $E(g(t))$ 在 H 中具有下半连续性, 即对 H 中的任何弱收敛序列 $\{u_{n_k}(t)\}$ 有 $u_{n_k}(t) \xrightarrow{弱} g(t)$, $(k \to \infty)$ 在 H 中成立, 因此 $E(g(t)) \leqslant \lim_{k\to\infty} E(u_{n_k}) = e$, 从而 $E(g(t)) = \min_{u\in H} E(u) = e$.

最后证明 $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) = \pm 1$. 若有 $\lim_{t\to\pm\infty} g(t) \neq \pm 1$, 则 $\lim_{t\to\pm\infty} |g(t)| < 1$, 因此 $\sup_{R^+} g(t) < 1$. 但是, 显然有 $E(g(t)) \geqslant \int_0^{+\infty} \min_{R^+} F(g(t))\,\mathrm{d}t = +\infty$, 矛盾!

综上可知, 命题得证.

参考文献:

[1] Nakashima K. Stable transition layers in a balanced bi-stable equation[J]. Differential and Integral Equations, 2000, 13: 1025-1038.

[2] Nakashima K. Multi-layered stationary solutions for a spatially inhomogeneous Allen-Cahn equation[J]. J-Differential Equations, 2003, 191: 234-276.

[3] Stanley Alama, Lia Bronsard, Changfeng Gui. Stationary layered solutions in for an Allen-Cahn systems with multiple-well potentials[J]. Calculus of Variation and PDE, 1997, 5: 359-390.

[4] Savin O. Small perturbation solutions for elliptic equations. Comm [J]. Partial Differential Equations, 2007, 32: 557-558.

[5] Gui C. Hamiltonial identity for elliptic partial differential equations[J]. J Funct Annual, 2008, 57: 781-836.

[6] Gui C, Schatzman M. Symmetric quadruple phase transition[J]. Indiana University Mathematical Journal, 2008, 57: 781-836.