第 24卷第 2期 南华大学学报 (自然科学版) Vol 24 No. 2
2010年 6月 Journal of University of South China (Science and Technology) Jun. 2010

文章编号: 1673-0062(2010)02-0068-06

一类抛物方程正交小波基的构造

赵建斌[1], 罗迪凡[2*], 喻海元[3], 尹 伊[4]

(1. 滨州学院 计算机科学技术系, 山东 滨州 256603; 2. 南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001; 3. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105; 4. 广州市第 113中学, 广东 广州 510630)

摘 要: 对抛物方程右端项关于时间变量先作小波展开, 化为多个可以并行的椭圆方程求解, 是国际上近些年来发展起来的一种新的数值求解方法. 本文利用勒让德多项式构造出了一类适合的正交小波基, 并给出了一般情况下的小波系数递推公式. 数值例子验证了递推公式的有效性.

关键词: 抛物方程; 正交小波基; 小波系数; 递推公式
中图分类号: O175. 26 文献标识码: A

Construction of a Class of Orthogonal Wavelet Bases about Parabolic Equations

ZHAO Jian-bin[1], LUO Di-fan[2*], YU Hai-yuan[3], YIN Yi[4]

(1. Department of Computer Science and Technology, Binzhou University, Binzhou, Shandong 256603, China; 2. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China; 3. School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China; 4. 113 Middle School, Guangzhou 510630, China)

Abstract In recent years, some foreign scholars have develop a new method for the numerical solution of PPDEs. As the first step the method uses wavelet bases to decompose the forcing term, so the problem is transformed into some elliptic PDEs which can be solved by parallel algorithm. In this paper, we will construct a class of Orthogonal Wavelet Bases, and present the general recurrence formula of wavelet coefficients. The numerical test convinces our analysis.

Key words parabolic differential equations; orthogonal wavelet bases; wavelet coefficients; recurrence formula

近年来, 小波方法在某些算子方程 (包括椭圆偏微分方程、边界积分方程、安点问题等)的数值求解方面的应用中取得了很大的进步. 对于解决许多实际应用问题, 小波方法有着自身的优势.

收稿日期: 2010-05-07
作者简介: 赵建斌 (1981-), 男, 山东滨州人, 滨州学院计算机科学技术系助教, 硕士研究生. 主要研究方向: 偏微分方程数值解. * 通信作者.

事实上, 由小波方法的得到关于椭圆方程的预条件算子条件数被已被证明是渐进最优的[1-2]. 而用小波方法求解偏微分方程问题, 关键在于构造出使原问题与其离散模型之间有着紧密联系的恰当的小波基函数.

考虑如下的抽象抛物方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t) + Au(t) = f(t),\ t\in(0,T) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

则

$$u(t) = (Lf)(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau)\mathrm{d}\tau \in [0,T].$$

f 与 u 均可看作定义在区间 $[0,T]$ 上且在巴拿赫空间 X_0 中取值的泛函, 它们均可用一组适当选取的小波基 $\Theta = \{\theta_\mu: \mu\in K\}$ 表示, 即,

$$f(t) = \sum_{\mu\in K} d_\mu\theta_\mu(t),\ u(t) = \sum_{v\in K} c_v\theta_v(t),$$

其中, $d_\mu, c_v \in X_0$.

为了设计出关于 u 的近似解的可计算格式, 首先要用无限集 K 的某个有限子集 $\hat{K}$ 将其代替, 而 $\hat{K}$ 中应该包含那些在 u 中有数值计算意义的系数. 用如下的方法来构造 $\hat{K}$: 对一个给定的容许值 $\eta > 0$, 希望 $\hat{K}$ 尽可能的小, 且满足

$$\{v\in K: \| c_v \|_{X_0} > \eta\} \subset \hat{K}$$

而由于解算子 L 是线性的, 系数 c_v 可以进一步作如下分解

$$c_v = \sum_{\mu\in K} c_{\mu,v},\ c_{\mu,v} := \langle L(d_\mu\theta_\mu), \theta_v\rangle$$

于是, 问题就归结为对 $\| c_v \|_{X_0}$ 的估计. 文献[3] ~ 文献[5] 给出了小波基对抛物问题在时间域上进行离散的理论框架, 以此为基础, 本文主要围绕小波基的具体构造来展开.

1 小波基的初步构造

引入 k 次 Legendre多项式:

$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{\mathrm{d}^k(x^2-1)^k}{\mathrm{d}x^k}$, 它具有如下性质:

(i) 首项系数均为 1

(ii) $\int_{-1}^1 P_kP_l\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{2}{2k+1}, & l = k, \\ 0, & l\neq k \end{cases}$

记

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} \sqrt{2k+1}P_k(2t-1), & 0\leqslant t < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$V_0 = \{\varphi_k(t), k = 0(1)n\}$. 则 $\{\varphi_k(x)\}$ 构成了 V_0 的一组 $L^2(0,1)$ 规范正交基. 再记: $V_1 = \{\varphi_k(2t), \varphi_k(2t-1), k = 0(1)n\}$. 由于 $V_0\subset V_1$, 不妨设 $V_1 = V_0 \oplus W_0$. 这里, V_0 称为尺度空间, W_0 称为小波空间.

设尺度空间的双尺度关系为:

$$\varphi_k(t) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^n [c_l^k\varphi_l(2t) + d_l^k\varphi_l(2t-1)],$$

$$k = 0(1)n. \tag{1}$$

其中系数 c_l^k 及 d_l^k 均是一些可计算的量.

再设 $\{\psi_k(t)\}_{k=0}^n$ 为 W_0 的一组 $L^2(0,1)$ 规范正交基. 考虑到 $W_0\subset V_1$, 因此不妨设:

$$\psi_k(t) = \sqrt{2}\sum_{l=0}^n [a_l^k\varphi_l(2t) + b_l^k\varphi_l(2t-1)],$$

$$k = 0(1)n. \tag{2}$$

由规范正交性可知:

$$\begin{aligned}(\psi_i, \psi_j) &= 2\int_0^1\sum_{l=0}^n[a_l^i\varphi_l(2t) + b_l^i\varphi_l(2t-1)] \sum_{l=0}^n[a_l^i\varphi_l(2t) + b_j^k\varphi_l(2t-1)]\mathrm{d}t \\ &= \sum_{l=0}^n (a_l^ia_l^j + b_l^ib_l^j) \\ &= \delta_{ij} \quad i, j = 0(1)n.\end{aligned} \tag{3}$$

又由小波分解正交性可知:

$$(\varphi_i, \psi_j) = 2\int_0^1\varphi_i(t)\psi_j(t) = \sum_{l=0}^n (c_l^ia_l^j + d_l^ib_l^j) = 0$$

$$i, j = 0(1)n. \tag{4}$$

记

$$\begin{aligned} A^i &= (a_0^i, a_1^i, \cdots, a_n^i)^{\mathrm{T}}, \\ B^i &= (b_0^i, b_1^i, \cdots, b_n^i)^{\mathrm{T}}, \\ C^i &= (c_0^i, c_1^i, \cdots, c_n^i)^{\mathrm{T}}, \\ D^i &= (d_0^i, d_1^i, \cdots, d_n^i)^{\mathrm{T}}, \\ A_n &= (A^0, A^1, \cdots, A^n), \\ B_n &= (B^0, B^1, \cdots, B^n), \\ C_n &= (C^0, C^1, \cdots, C^n), \\ D_n &= (D^0, D^1, \cdots, D^n). \end{aligned}$$

由式(3), 式(4), 有:

$$\begin{cases} A_n^{\mathrm{T}}A_n + B_n^{\mathrm{T}}B_n = I \\ C_n^{\mathrm{T}}A_n + D_n^{\mathrm{T}}B_n = 0 \end{cases} \tag{5}$$

这里 I 为 n 单位矩阵.

由式(5)可得

$$\begin{cases} A_n = -C_n^{-\mathrm{T}}D_n^{\mathrm{T}}B_n, \\ (D_n^{\mathrm{T}}B_n)^{\mathrm{T}}(C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}})D_n^{\mathrm{T}}B_n = I. \end{cases}$$

设 $C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}} = E_n^{-\mathrm{T}}E_n^{-1}$ 则有:

$$\begin{cases} B_n = D_n^{-\mathrm{T}}E_n, \\ A_n = -C_n^{-\mathrm{T}}E_n. \end{cases} \tag{6}$$

上式即为小波系数公式.

2 小波系数的递推公式

在本节中,将推导一般情况下小波系数的递推公式.

首先,已知

$$\begin{aligned}\varphi_k(t) &= \sqrt{2k+1}P_k(2t-1)\\ &= \frac{\sqrt{2k+1}}{k!}\frac{\mathrm{d}^k(t^2-t)^k}{\mathrm{d}t^k}\\ &= \sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\sqrt{2k+1}\frac{(m+k)!}{m!^2(k-m)!}\end{aligned}$$

令 $x = 2t-1$,则:

$$\begin{aligned}[2t(2t-1)]^k &= x^k(x+1)^k = x^k(x-1)^k\\ &= \sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\frac{k!}{m!^2(k-m)!}x^{k+m}\end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{cases}\varphi_k(2t) = \dfrac{\sqrt{2k+1}}{2^k k!}\dfrac{d^k[2t(2t-1)]^k}{dt^k}\\ \qquad = \sqrt{2k+1}\displaystyle\sum_{m=0}^{k}\frac{(m+k)!}{m!^2(k-m)!}x^m\\ \varphi_k(2t-1) = \dfrac{\sqrt{2k+1}}{2^k k!}\dfrac{d^k[(2t-1)(2t-2)]^k}{dt^k}\\ \qquad = \sqrt{2k+1}\displaystyle\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\frac{(m+k)!}{m!^2(k-m)!}x^m\end{cases}$$

记

$$\alpha_{k,m} = \sqrt{2k+1}\frac{(m+k)!}{m!^2(k-m)!}\beta_{k,m} = (-1)^{k-m}\alpha_{k,m},$$

则有:

$$C_n^{-\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\alpha_{0,0} & 0 & \cdots & 0\\ \alpha_{1,0} & \alpha_{1,1} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_{n,0} & \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n}\end{pmatrix} \tag{7}$$

$$D_n^{-\mathrm{T}} = \begin{pmatrix}\beta_{0,0} & 0 & \cdots & 0\\ \beta_{1,0} & \beta_{1,1} & \cdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \beta_{n,0} & \beta_{n,1} & \cdots & \beta_{n,n}\end{pmatrix} \tag{8}$$

于是可推得:

$$\begin{pmatrix}\varphi_0(2t)\\ \varphi_1(2t)\\ \vdots\\ \varphi_n(2t)\end{pmatrix} = C_n^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\ x\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0(2t-1)\\ \varphi_1(2t-1)\\ \vdots\\ \varphi_n(2t-1)\end{pmatrix} = D_n^{-\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1\\ x\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix}1\\ x\\ \vdots\\ x^n\end{pmatrix} = C_n^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\varphi_0(2t)\\ \varphi_1(2t)\\ \vdots\\ \varphi_n(2t)\end{pmatrix} + D_n^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\varphi_0(2t-1)\\ \varphi_1(2t-1)\\ \vdots\\ \varphi_n(2t-1)\end{pmatrix}$$

上式的作用等同于尺度空间的双尺度关系,因为 $\{x^k\}_{k=0}^{n}$ 也构成了尺度空间 V_0 的另一组基函数,但它不是正交基.

引入 $n+1$ 阶奇偶变换矩阵

当 n 为偶数时

$$P_n = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&\cdots&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&\cdots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1\\ 0&1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&\cdots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{第 0行}\\ \\ \\ \\ \text{第}\frac{n}{2}\\ \\ \\ \\ \text{第 }n\text{行}\end{array}$$

当 n 为奇数时

$$P_n = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&\cdots&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&\cdots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&1&0\\ 0&1&0&0&0&\cdots&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&\cdots&0&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots\vdots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&0&0&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\text{第 0行}\\ \\ \\ \\ \text{第}\frac{n}{2}\\ \\ \\ \\ \text{第 }n\text{行}\end{array}$$

则显然有如下性质:

(ⅰ) $$P_n\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\ y_2\\ \vdots\\ y_{2[\frac{n}{2}]}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}y_0\\ y_3\\ \vdots\\ y_{2[\frac{n-1}{2}]+1}\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

(ⅱ) P_n 为正交阵.

设 $C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}} = E_n^{-\mathrm{T}}E_n^{-1}$,其中,$C_n^{-\mathrm{T}}$ 和 $D_n^{-\mathrm{T}}$ 如式(7),式(8)所定义.

引理 1 $P_nE_n = \begin{pmatrix}E_n^{(0)} & 0\\ 0 & E_n^{(1)}\end{pmatrix}$,其中,$E_n^{(0)}$ 和 $E_n^{(1)}$ 分别为 $[\frac{n}{2}]+1$ 和 $[\frac{n-1}{2}]+1$ 阶矩阵.

证明. 对 $\forall y = (y_0, y_1, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}} \in R^{n+1}$ 有:

$y^{\mathrm{T}}(C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}})y$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{k}\alpha_k^m y_m\right)^2 + \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{m=0}^{k}\beta_k^m y_m\right)^2$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n}\left[\left(\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]}\alpha_k^m y_m\right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{[\frac{k+1}{2}]}\beta_k^m y_m\right)^2\right]$$

上式表明, 只须分别对 $C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}}$ 作偶相合变换和奇相合变换便可将它化为二次型标准形式, 再由 E_n 的定义即知引理成立.

下面就 n 为偶数或奇数两种情况分别加以讨论:

(1) 当 n 为偶数时, 对于 $y = (y_0, y_1, \cdots, y_n)^T$, 作变换:

$$y = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde y_0\\ \tilde y_2 \\ \vdots \\ \tilde y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tilde y$$

则它分别对应如下偶、奇两种变换:

$$\begin{pmatrix} y_0\\ y_0\\ \vdots \\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1}^{(0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde y_0\\ \tilde y_2 \\ \vdots \\ \tilde y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_3\\ \vdots \\ y_{n-1}\end{pmatrix} = E_{n-1}^{(1)}\begin{pmatrix}\tilde y_1\\ \tilde y_3 \\ \vdots \\ \tilde y_{n-1}\end{pmatrix}$$

则

$$y^T(C_n^{-1}C_n^{-T} + D_n^{-1}D_n^{-T})y$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\tilde y_k^2 + \left(\sum_{m=0}^{n}\alpha_{n,m}y_m\right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{n}\beta_{n,m}y_m\right)^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\tilde y_k^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{n,m} + \beta_{n,m})y_m\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{n}(\alpha_{n,m} - \beta_{n,m})y_m\right)^2$$

$$= \left[\tilde y_0^2 + \tilde y_2^2 + \cdots + \tilde y_{n-2}^2 + 2\left(\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\alpha_{n,2m}y_{2m}\right)^2\right] + \left[\tilde y_1^2 + \tilde y_3^2 + \cdots + \tilde y_{n-1}^2 + 2\left(\sum_{m=0}^{\frac{n}{2}}\alpha_{n,2m-1}y_{2m-1}\right)^2\right]$$

记

$$\tilde\alpha_n^{(0)} = (\alpha_{n,0}, \alpha_{n,2}, \cdots, \alpha_{n,n-2})^{\mathrm{T}}$$

$$\alpha_n^{(0)} = (\alpha_{n,0}, \alpha_{n,2}, \cdots, \alpha_{n,n-2}, \alpha_{n,n})^{\mathrm{T}} = (\tilde\alpha_n^{(0)}, \alpha_{n,n})$$

$$\alpha_n^{(1)} = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,3}, \cdots, \alpha_{n,n-1})^{\mathrm{T}}$$

$$d_n = \sqrt{2}E_{n-1}^{(1)}\alpha_n^{(1)}$$

则上式又可写成如下形式:

$$y^{\mathrm{T}}(C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}})y$$

$$= (\tilde y_0, \tilde y_2, \cdots, \tilde y_n)\begin{pmatrix} I & \sqrt{2}E_{n-1}^{(0)}\tilde\alpha_n^{(0)} \\ 0 & \sqrt{2}\alpha_{n,n}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I & \sqrt{2}E_{n-1}^{(0)}\tilde\alpha_n^{(0)} \\ 0 & \sqrt{2}\alpha_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde y_0\\ \tilde y_2 \\ \vdots \\ \tilde y_n\end{pmatrix} + (\tilde y_1, \tilde y_3, \cdots, \tilde y_{n-1}) \times (I + d_n d_n^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\tilde y_1\\ \tilde y_3 \\ \vdots \\ \tilde y_{n-1}\end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{pmatrix} I & \sqrt{2}E_{n-1}^{(0)}\tilde\alpha_n^{(0)} \\ 0 & \sqrt{2}\alpha_{n,n}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -\frac{1}{\alpha_{n,n}}E_{n-1}^{(0)}\tilde\alpha_n^{(0)} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}}\end{pmatrix}$$

$$I + d_n d_n^{\mathrm{T}} = (I + \varepsilon_n d_n d_n^{\mathrm{T}})^2$$

$$(I + \varepsilon_n d_n d_n^{\mathrm{T}})^{-1} = I + \delta_n d_n d_n^{\mathrm{T}}$$

其中, $\varepsilon_n = \frac{\sqrt{1 + |d_n|^2} - 1}{|d_n|^2}$,

$$\delta_n = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1 + |d_n|^2}}$$

于是, 再分别作变换:

$$\begin{pmatrix}\tilde y_0\\ \tilde y_2 \\ \vdots \\ \tilde y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\alpha_{n,n}}(E_{n-1}^{(0)}\tilde\alpha_n^{(0)})^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde y}_0\\ \tilde{\tilde y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde y}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde y_1\\ \tilde y_3 \\ \vdots \\ \tilde y_{n-1}\end{pmatrix} = I + \delta_n d_n d_n^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde y}_1\\ \tilde{\tilde y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{\tilde y}_{n-1}\end{pmatrix}$$

则有: $y^{\mathrm{T}}(C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}})y = \sum_{k=0}^{n}\tilde{\tilde y}_k^2$

综合两次变换, 由引理即得到以下递推公式:

$$\begin{cases} E_n^{(0)} = \begin{pmatrix} E_{n-1}^{(0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -\frac{1}{\alpha_{n,n}}(E_{n-1}^{(0)}\tilde\alpha_n^{(0)})^{\mathrm{T}} & \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}}\end{pmatrix} \\ E_n^{(1)} = E_{n-1}^{(1)}(I + 2\delta_n E_{n-1}^{(1)}\alpha_n^1(E_{n-1}^{(1)}\alpha_n^1)^{\mathrm{T}}) \end{cases}$$

由上式可推得:

$$E_n = p_n^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} E_n^{(0)} & 0 \\ 0 & E_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * (I + P_n\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}F_n\begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}P_n^{\mathrm{T}})$$

其中

$$F_n = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{\tilde{\alpha}_n^{(0)\mathrm{T}}}{\alpha_{n,n}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}} - 1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 2\delta_n \alpha_n^1 \alpha_n^{1T} \end{pmatrix}$$

(2) 当 n为奇数时,与上述类似,作变换:

$$y = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{y}$$

则

$$y^{\mathrm{T}}(C_n^{-1}C_n^{-\mathrm{T}} + D_n^{-1}D_n^{-\mathrm{T}})y$$

$$= [\tilde{y}_0^2 + \tilde{y}_2^2 + \cdots + \tilde{y}_{n-1}^2 + 2(\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \alpha_{n,2m} y_{2m})^2] + [\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_3^2 + \cdots + \tilde{y}_n^2 + 2(\sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} \alpha_{n,2m+1} y_{2m+1})^2]$$

$$= (\tilde{y}_0, \tilde{y}_2, \cdots, \tilde{y}_{n-1})(I + e_n e_n^{\mathrm{T}}) \begin{pmatrix} \tilde{y}_0 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n-1} \end{pmatrix} + (\tilde{y}_1, \tilde{y}_3, \cdots, \tilde{y}_n) \begin{pmatrix} I & \sqrt{2}E_{n-1}^{(1)}\tilde{\alpha}_n^{(1)} \\ 0 & \sqrt{2}\alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \sqrt{2}E_{n-1}^{(1)}\tilde{\alpha}_n^{(1)} \\ 0 & \sqrt{2}\alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix}$$

其中,

$$\tilde{\alpha}_n^{(1)} = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,3}, \cdots, \alpha_{n,n-1})^{\mathrm{T}};$$

$$e_n = \sqrt{2}E_{n-1}^{(0)}\alpha_n^{(0)}$$

由于

$$\begin{pmatrix} I & \sqrt{2}E_{n-1}^{(1)}\tilde{\alpha}_n^{(1)} \\ 0 & \sqrt{2}\alpha_{n,n} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{\alpha_{n,n}}(E_{n-1}^{(1)}\tilde{\alpha}_n^{(1)})^{\mathrm{T}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}} \end{pmatrix}$$

$$I + e_n e_n^{\mathrm{T}} = (I + \varphi_n e_n e_n^{\mathrm{T}})^2$$

$$(I + \varphi_n e_n e_n^{\mathrm{T}})^{-1} = 1 + \psi_n e_n e_n^{\mathrm{T}}$$

其中, $\varphi_n = \dfrac{\sqrt{1 + |e_n|^2} - 1}{|e_n|^2}$,

$$\psi_n = -\frac{\varphi_n}{\sqrt{1 + |e_n|^2}}$$

则有递推公式:

$$\begin{cases} E_n^{(0)} = E_{n-1}^{(0)}(I + 2\delta_n E_{n-1}^{(0)}\alpha_n^0 (E_{n-1}^{(0)}\alpha_n^0)^{\mathrm{T}}) \\ E_n^{(1)} = \begin{pmatrix} E_{n-1}^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\dfrac{1}{\alpha_{n,n}}(E_{n-1}^{(1)}\tilde{\alpha}_n^{(1)})^{\mathrm{T}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

由上式可推得:

$$E_n = P_n^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} E_n^{(0)} & 0 \\ 0 & E_n^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (I + P_n \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times G_n \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} P_n^{\mathrm{T}})$$

其中,

$$G_n = \begin{pmatrix} 2\psi_n \alpha_n^0 \alpha_n^{0T} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\dfrac{\tilde{\alpha}_n^{(1)T}}{\alpha_{n,n}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}\alpha_{n,n}} - 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

3 数值试验

考虑积分方程

$$\int_0^s e^{cst} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{s(cs)} - 1}{cs - 1}, \quad s \in [0, 1]$$

其中 c为正常数,可以验证其精确解为 $f(t) = e^{-t}$,表 1与表 2分别给出了当 $c = 1/2$与 $c = 1$时,在不同剖分尺度下其数值解与精确解的误差及收敛率,其中

$$\tilde{f}^h(t) = \frac{1}{3}(4f^{h/2}(t) - f^h(t)),$$

$$e^h(t) = f^h(t) - f(t),\ \tilde{e}^h(t) = \tilde{f}^h(t) - f(t),$$

$$r^h(t) = \frac{e^h(t)}{e^{h/2}(t)},\ \tilde{r}^h(t) = \frac{\tilde{e}^h(t)}{\tilde{e}^{h/2}(t)}.$$

表 1 当 $c=1$,在 $t=1/2$点处,数值解与精确解的误差及收敛率

Table 1 Error between numerical solutions and exact solutions as well as convergence rate of numerical solutions when letting $c=1$ ang $t=1$

h	$f^h(t)$	$\tilde{f}^h(t)$	$e^h(t)$	$r^h(t)$	$\tilde{e}^h(t)$	$\tilde{r}^h(t)$
0.1	0.607 017 497	0.606 533 320	0.000 486 837	3.935 463 900	0.000 000 809	16.017
0.05	0.606 654 365	0.606 533 193	0.000 123 705	3.768 474 367	0.000 000 050	
0.025	0.606 563 486		0.000 032 826			

表 2 当 $c=1/2$ 在 $t=1/2$ 点处, 数值解与精确解的误差及收敛率

Table 2 Error between numerical solutions and exact solutions as well as convergence rate of numerical solutions when letting $c=1/2$ ang $t=1/2$

h	$f^h(t)$	$\tilde{f}^h(t)$	$e^h(t)$	$r^h(t)$	$\tilde{e}^h(t)$	$\tilde{r}^h(t)$
0.1	0.607 267 130	0.606 530 212	0.000 736 470	4.007 294 285	0.000 000 446	16.01
0.05	0.606 714 442	0.606 530 631	0.000 183 782	4.001 823 236	0.000 000 027	
0.025	0.606 576 584		0.000 045 924			

数值结果表明递推公式在数值求解中的有效应用.

参考文献:

[1] Dahmen W, Kunoth A. Multilevel preconditioning[J]. Numer Math., 1992, 63(1): 315-344.

[2] Jaffard S. Wavelet methods for fast resolution of elliptic problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(4): 965-986.

[3] Alpert B K. Wavelets and other bases for fast numerical linear algebra[M]. Wavelets: A tutorial in theory and applications, New York: Academic, 1992.

[4] Jürgens M. A Semigroup Approach to the Numerical Solution of Parabolic Differential Equations[D]. Nordrhein-Westfalen: RWTH Aachen(Aachen Institut für Geometrie und Praktische Mathematik), 2005.

[5] Jürgens M. Adaptive application of the operator exponential[J]. Journal of Numerical Mathematics, 2006, 14(3): 217-246.

(上接第 60页)

向的转变; 三是建立和完善区域灾害信息系统、预警系统和应急救助系统, 借助先进科技手段, 将灾害监测、数据收集整理、评估、预测、管理、应急救助有机结合起来, 以提高区域的综合防灾减灾能力; 四是加强山、河、湖、库的综合治理, 改善和优化生态环境, 从根本上优化生态环境, 促进生态平衡, 将洪涝灾害控制在最低限度.

参考文献:

[1] 毛德华. 湖南省主要自然灾害及减灾策略[J]. 灾害学, 1991, 6(4): 38-42.

[2] 李晓青. 湖南主要自然灾害及防治对策[J]. 经济地理, 1991, 11(1): 70-75.

[3] 谷 太, 焦启运. 湖南省的自然灾害与防治对策[J]. 科技进步与对策, 1999(2): 147-150.

[4] 谢 炼, 郭元勋. 湖南省洪涝灾害成因及防治对策[J]. 中国减灾, 1992, 2(3): 43-46.

[5] 李吉顺, 杨秀英, 陈家田. 湖南省强降雨过程的时间变化与洪涝灾害[J]. 中国减灾, 1998, 8(4): 33-35.

[6] 杨 燕, 彭迪刚. 90年代湖南水灾特征及其成因剖析[J]. 长沙电力学院学报, 2000, 15(3): 91-93.

[7] 杨志荣, 邓 兴. 湖南省近 500年洪涝灾害时空分布规律[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 1994, 17(4): 76-83.

[8] 贺建林. 近五十年来湖南省洪涝灾害及其时空分布[J]. 衡阳师范学院学报, 1999, 20(60): 83-87.

[9] 贺建林. 湖南省水旱灾害及其时空分布[J]. 长江流域资源与环境, 1997, 6(2): 187-192.

[10] 刘会平, 梁红梅, 倪研贤, 等. 广东农业水灾的年际分布规律及重灾年份预测[J]. 热带地理, 2007, 27(3): 203-206.

[11] 梁红梅, 刘会平, 宋建阳, 等. 广东农业旱灾的时间分布规律及重灾年份预测[J]. 自然灾害学报, 2006, 15(4): 79-83.

[12] 傅泽强, 蔡运农, 李 军. 我国农业水旱灾害的时间分布及重灾年景趋势预测[J]. 自然灾害学报, 2002, 11(2): 7-13.

[13] 王 铮. 近 40年来中国自然灾害的时空统计特征[J]. 自然灾害学报, 1994, 3(2): 16-21.

[14] 周长锋, 龚日朝. 基于傅里叶级数的自然灾害损失预测模型研究——以湖南省自然灾害经济损失预测为例[J]. 中国安全科学学报, 2009, 19(8): 5-9.

[15] 龚日朝, 罗钰婕, 王 芳, 等. 湖南旱灾灰色灾变预测模型与实证研究[J]. 湖南科技大学学报 (社会科学版), 2010, 13(1): 86-90.

[16] 湖南统计局. 湖南统计年鉴: 1980-2008年[M]. 北京: 中国统计出版社, 1980-2008.

[17] 中国统计局. 中国统计年鉴: 1984-1989年[M]. 北京: 中国统计出版社, 1984-1989.