

基于自住需求的个人融资投资房地产的模型

张 敏, 罗迪凡

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘 要: 在房地产价格随机性条件下对投资者通过融资投资购买房产的问题进行了建模, 并运用停时分析、动态规划等方法求解了这个基于实物期权的模型, 明确了投资规则中的期权价值, 求出了投资者转租为融资买房的最佳房价以及投机者融资入市的房价临界值, 本文还对上述结论给出了数值结果.

关键词: 融资; 实物期权; 期权定价理论; 房地产; 临界值

中图分类号: F830.0211.6 **文献标识码:** A

Based on the Individual Needs of Owner-occupied Real Estate Financing Investment Model

ZHANG Min, LUO Di-fan

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract In this article we established the mathematical model to discuss the problem of real estate investors to invest through financing with the randomness in the real estate prices and analyzed the model by the method of stopping time, dynamic programming and determined the investment value of the options. Investors find financing to buy a house rented for the best price and the financing of speculators into the market price with the critical value. The paper also gives the conclusions of the above numerical results.

Key words financing; real option; option pricing theory; real estate threshold

购买住房对于普通家庭来说是一生中重大的投资, 对于为满足居住需求的普通置业阶层, 普遍通过住房公积金贷款或商业贷款等融资投资房产, 因此在高价位下做出购买住房可能会显著影响到家庭将来的生活质量和负担, 那么随机波动的房价、货币政策以及其他经济因素达到什么条件时, 投资者才会做出购买房产的决策呢? 这正是本文所要讨论的问题.

1 模型建立

假设房地产的价格 P 服从如下形式的几何布朗运动, 考虑当前投资者通过租房来满足居家需要. 他需要根据随机变化的房价来确定是继续租房还是转租为购买住房. 假设投资者租房的年租金支付为一固定值常数 R . 如果投资者只租不买,

则投资者一生所需要支付的资金为 $V_{\infty} = R_0 \int_0^T e^{-rt} dt = \frac{R(1 - e^{-rT})}{r}$ (T 年的租期)。

把投资者继续租房状态的看做继续决策, 把停止租房转为购买住房为停止决策。那么, 当房价达到某个最优值 P^* 时, 停止决策将会发生, 停止决策时投资者的期望支付应该最小; 否则, 投资者将会继续决策。为求出这一最优投资时机 τ 设定生变量 $\hat{P}$, 它表示在 $\hat{P}$ 处的停止决策可以得到一定利益, 但并不一定是最优的 (最优的停止决策是 P^*)。

在 τ 时刻, 为简化模型下文假设贷款为定期本息一起还款, 则投资者为投资房产所需要的融资成本为 $P_{\tau} e^{r\tau_0}$, 其现值为 $P_{\tau} e^{r\tau_0} e^{-r(\tau + T_0)} = e^{(\rho - r)T_0} P_{\tau} e^{-r\tau}$, 则在 $\hat{P}$ 时, 投资者停止决策的期望支出为 V_s , 它满足:

$$V_s = RE \int_0^{\tau} e^{-nt} dt + e^{(\rho - r)T_0} P_{\tau} E e^{-r\tau} + C \int_0^{\tau} e^{-nt} dt \tag{1}$$

其中, $\tau = \inf\{t > 0 | P_t \leq \hat{P}\}$, $e^{(\rho - r)T_0} P_{\tau}$ 为购买住房的融资成本, C 为由于拥有房产而产生的每年平均支出 (它包括购买住房向中介支付的佣金、各类税费等), E 为期望运算。

2 模型的求解

由于 $P_{\tau} = \hat{P}$, 从而式 (1) 可以化简为

$$V_s = RE \int_0^{\tau} e^{-nt} dt + e^{(\rho - r)T_0} \hat{P} E e^{-r\tau} + C \int_0^{\tau} e^{-nt} dt = \left[\frac{C - R}{r} + e^{(\rho - r)T_0} \hat{P} J E e^{-r\tau} + \frac{R}{r} - \frac{C}{r} e^{-r\tau} \right] \tag{2}$$

$$\text{记 } \Delta = V_{\infty} - V_s = \frac{R(1 - e^{-rT})}{r} - \left[\frac{C - R}{r} + e^{(\rho - r)T_0} \hat{P} J E e^{-r\tau} + \frac{R}{r} - \frac{C}{r} e^{-r\tau} \right] = \left[\frac{R - C}{r} - e^{(\rho - r)T_0} \hat{P} J E e^{-r\tau} - \frac{R - C}{r} e^{-r\tau} \right] \tag{3}$$

显然, 必然在 Δ 为正值时理性投资者才会实施停止决策, 从而转租为融资购买的最优转换期权价值为

$$\Delta^+ = \max\{V_{\infty} - V_s, 0\} = \left[\frac{R - C}{r} - e^{(\rho - r)T_0} \times \hat{P} J E e^{-r\tau} - \frac{R - C}{r} e^{-r\tau} \right] \tag{4}$$

为求出最优阈值 P^* , 需要对式 (4) 关于 $\hat{P}$ 求导。这需要计算 $E e^{-r\tau}$, 推导过程参照参考文献 [1]:

记 $f(P) = E e^{-r\tau}$ 。由于 τ 是购置期权的最佳执

行时间, 所以 $E e^{-r\tau}$ 是最优的。对一般的 P ($P > P^*$), 在 dt 充分小的时间段之后值为 $P - dP$, 那么由于持有购置期权并不产生即期现金流, 所以 $f(P)$ 满足无即期利润流的 Bellman 方程 $f(P) = e^{-r\tau} E[f(P - dP) | P]$ 。

利用 Taylor 公式不难得到 $f(P - dP) = f - f' dP + \frac{1}{2} f'' (dP)^2 + o[(dP)^2]$

考虑到 $(dW)^2 = 0$, $dW dt = 0$, $(dt)^2 = 0$ 从而 $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$, $o[(dP)^2] = 0$ 故 $f(P - dP) = f - f' dP + \frac{1}{2} f'' \sigma^2 P^2 dt = f - f' \mu dt - f' \sigma P dW + \frac{1}{2} f'' \sigma^2 P^2 dt$

$$\text{从而 } E[f(P - dP) | P] = f - f' \mu dt + \frac{1}{2} f'' \sigma^2 P^2 dt$$

又根据 Taylor 公式得到 $e^{-r\tau} = 1 - rdt + o(dt)$, 从而 $f(P) = e^{-r\tau} E[f(P - dP) | P]$

$$\text{变为 } f = [1 - rdt + o(dt)] \cdot [f - f' \mu dt + \frac{1}{2} f'' \sigma^2 P^2 dt],$$

整理后, 并令 $dt \rightarrow 0$ 容易得到下面的方程

$$\frac{1}{2} \sigma^2 f'' P^2 - f' \mu - rf = 0$$

方程的解法是标准的 (参见文献 [1 - 2]), 其解为 $f(P) = AP^{\beta_1} + BP^{\beta_2}$,

其中 A 与 B 均为待定常数, β_i , $i = 1, 2$ 是如下二元二次方程的 2 个根

$$\sigma^2 \beta(\beta - 1) / 2 - \mu\beta - r = 0 \tag{5}$$

因为 $Q(0) < 0$ 所以

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} > 1$$
$$\beta_2 = \frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} < 0$$

又考虑到如下边界条件

- 1) 当 $P \rightarrow \hat{P}$, 等待时间 $\tau \rightarrow 0$, $f(\hat{P}) = 1$;
- 2) 当 $P \rightarrow \infty$, 等待时间 $\tau \rightarrow \infty$, $f(\infty) = 0$

从而, 可以得到 $A = 0$, $B = (1/\hat{P})^{\beta_2}$, 所以 $f(P) = E e^{-r\tau} = (P/\hat{P})^{\beta_2}$ 。注意式中 t 是与 P 相对应的。这样对任何初值 $P_0 > \hat{P}$, 就可得到 $f(P_0) = E e^{-r\tau} = (P_0/\hat{P})^{\beta_2}$ 。故式 (4) 变为

$$\Delta^+ = \max\{V_{\infty} - V_s, 0\} = \left[\frac{R - C}{r} - e^{(\rho - r)T_0} \hat{P} J \left(\frac{P_0}{\hat{P}}\right)^{\beta_2} - \frac{R - C}{r} e^{-rT} \right] \tag{6}$$

由于 $\Delta^+ \geq 0$ 从而必有 $[\frac{R-C}{r} - \frac{R-C}{r}e^{-\beta_2 T_0}]|_{P=P^*} = 0$ (8)

$$e^{(\beta_2-r)T_0}P] (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} \geq \frac{R-C}{r}e^{-\beta_2 T_0},$$

$$\frac{\partial^2 \Delta^+}{\partial P^2}|_{P=P^*} < 0$$

即 $\hat{P} \leq \frac{R-C}{re^{(\beta_2-r)T_0}} - \frac{R-C}{re^{(\beta_2-r)T_0}}e^{-\beta_2 T_0} (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} = \hat{P} -$

$$\frac{R-C}{re^{(\beta_2-r)T_0}}e^{-\beta_2 T_0} (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} = \hat{P} - \frac{R-C}{r}e^{-\beta_2 T_0 - (\beta_2-r)T_0} (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} =$$

$$P_{FR}.$$

$$\frac{\partial \Delta^+}{\partial P}|_{P=P^*} = -e^{(\beta_2-r)T_0} (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} + \beta_2 (\frac{R-C}{r} - e^{(\beta_2-r)T_0} P^*) (\frac{-P_0}{P^{*2}}) (\frac{P_0}{P^*})^{\beta_2-1} = 0$$

3 主要结论

结论 1 投资者停止决策的可行域 FR 必满足:

$$FR = \{P \mid P \leq \hat{P} - \frac{(R-C)}{r}e^{-\beta_2 T_0 - (\beta_2-r)T_0} \times$$

$$(\frac{P_0}{P})^{\beta_2}\}, \hat{P} = \frac{R-C}{re^{(\beta_2-r)T_0}}$$

对 $\hat{P}$ 的求解方法是标准的:

P^* 为最优临界值意味着它可以使式 (6) 最大化, 即

$$V^* = \max \Delta^+ = \max \{ (\frac{R-C}{r} - e^{(\beta_2-r)T_0} \hat{P}) \times$$

$$(\frac{P_0}{P})^{\beta_2} - \frac{R-C}{r}e^{-\beta_2 T_0} \} = (\frac{R-C}{r} - e^{(\beta_2-r)T_0} P^*) \times$$

$$(\frac{P_0}{P^*})^{\beta_2} - \frac{R-C}{r}e^{-\beta_2 T_0} \quad (7)$$

这样的 P^* 必然满足最大化问题的一阶与二阶条件

$$\frac{\partial \Delta^+}{\partial P}|_{P=P^*} = \frac{\partial}{\partial P} ((\frac{R-C}{r} - e^{(\beta_2-r)T_0} \hat{P}) (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} -$$

方程 (8) 即

$$\frac{\partial \Delta^+}{\partial P}|_{P=P^*} = -e^{(\beta_2-r)T_0} (\frac{P_0}{P})^{\beta_2} + \beta_2 (\frac{R-C}{r} -$$

$$\text{故, } P^* = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \frac{R-C}{re^{(\beta_2-r)T_0}} = \frac{\beta_2}{\beta_2 - 1} \hat{P},$$

$$\hat{P} = \frac{R-C}{re^{(\beta_2-r)T_0}}$$

下面验证 P^* 为所求的最优值. 这只需证明式 (9) 成立. 将式 (10) 代入式 (9) 得

$$\frac{\partial^2 \Delta^+}{\partial P^2}|_{P=P^*} = P_0^{\beta_2} P^{*(-\beta_2-1)} \cdot e^{(\beta_2-r)T_0} (\beta_2 - 1) < 0$$

将 (10) 式代入式 (7) 得到最大期望节约支出

$$V^* = \frac{R-C}{r} [(\frac{re^{(\beta_2-r)T_0} P_0}{R-C})^{\beta_2} (\frac{\beta_2 - 1}{\beta_2})^{\beta_2} \times$$

$$\frac{1}{1 - \beta_2} - e^{-\beta_2 T_0})] \quad (12)$$

结论 2 投资者的最优停止决策时机为 $P = P^*$, 此时节约的支出最大, 其值由式 (10) 给出.

最大期望节约支出 V^* 与参数 σ 、 μ 、 R 呈递增的函数关系, 与 r 、 P_0 和 C 呈递减的函数关系. 这一结论的数值说明见表 1

表 1 参数 μ 、 σ 、 r 、 P_0 、 R 、 C 与 β_2 、 P^* 、 V^* 的关系数值结果
Table 1 The numerical relationship between Parameters μ 、 σ 、 r 、 P_0 、 R 、 C and β_2 、 P^* 、 V^*

$\mu\%$	$\sigma\%$	$r\%$	$P_0\%$	R 万	C 万	β_2 万	P^* 万	V^* 万	
1	10	2	6	2	0.2	30	-1	30.16	23.05
1	10	4	8	2	0.2	30	-1.7015	18.99	4.8
1	10	6	10	2	0.2	30	-2.749	14.75	0.588
1	15	2	6	2	0.2	30	-0.689	24.61	24.29
1	20	2	6	2	0.2	30	-0.5	20.11	26.93
4	10	1	5	3	0.2	30	-0.2170	33.44	227.1
1	10	2	6	3	0.2	55	-1	46.92	24.96
1	10	2	6	4	0.2	55	-1	63.68	62.70
1	10	2	5	3	0.2	55	-1	51.86	31.47
1	10	2	8	3	0.2	55	-1	38.42	14.37
5	10	1	5	3	0.2	30	-0.1789	28.47	198.8
10	10	1	5	3	0.2	30	-0.0948	16.25	152.8
1	10	2	6	2	0.1	30	-1	31.80	26.99
1	10	2	6	2	0.3	30	-1	28.48	19.40

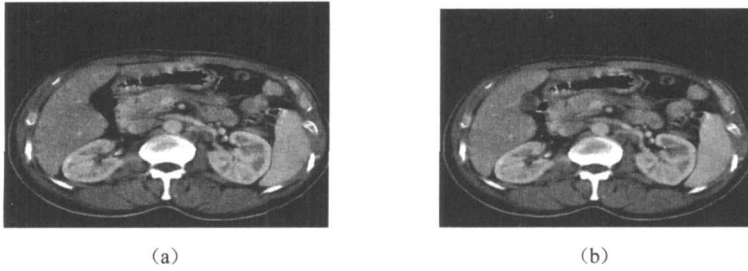


图 2 肝脏 CT 图像
Fig 2 Liver CT in age

通过计算分形维数可以得到这些结论:

- 1) 正常肝脏软组织的分形维数大概在 2.65 而肿瘤细胞的分形维数在 2.7 以上;
- 2) 同一脏器软组织的分形维数值和它们所处的位置无关,而只和组织所表现出来的性质有关,即是正常组织还是肿瘤组织;
- 3) 从分维数大小可以很直观的反映出组织的一些特性值,组织的分维数在某种意义上代表了组织的纹理特征.实验结果表明分形维数能体现分维特征,分维特征可以很好的反映出肝脏 CT 图像的纹理特征,病变组织的分形维数高于正常组织的分形维数,所以对肝脏 CT 图形进行诊断时,可以把图像的分形维数数值做为区分正常组织与病变组织的参考值.将来的工作是对识别的结果图像肿瘤组织进行纹理分割,能更好的应用于医学临床指导.

参考文献:

[1] Neil G, Curtis K M. Shape recognition using fractal dimension[J]. Patten Recognition, 1997, 30(12): 1957- 1969
[2] Wu G, Liang D, Tian Y. Texture image segmentation

using fractal dimension[J]. Chinese Journal of Computers, 1999, 22(10): 1109- 1113
[3] 舒林梅, 钟春香. 图像分维数特征提取算法及分析[J]. 华中理工大学学报, 1994, 22(5): 77- 80
[4] 钟春香, 舒林梅. 基于图像分维特征的分割算法及分析[J]. 计算机数字工程, 1994, 22(1): 41- 43
[5] 曾发龙, 王思贤, 李飞鹏, 等. 分形维数特征量对病变组织的超声定位[J]. 中国图像图形学报, 1999, 4(8): 673- 676
[6] 宋寿鹏, 阙沛文. 基于归一化尺度计盒维数的超声波分形特征研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2006, 14(1): 121- 128
[7] Sarker I N, Chaudhuri B B. An efficient differential box - counting approach to compute fractal dimension of image[J]. IEEE Tran on Syst, Man and Cybernetic, 1994, 24(1): 115- 120
[8] 蒋 勇. 基于分形维数的肺部软组织 CT 图像的纹理特征研究[J]. 中国医学装备, 2004, 1(3): 28- 31.
[9] 陈真诚, 周兆英, 赵于前, 等. 人体肝脏组织 CT 图像的分维特征研究[J]. 航天医学与医学工程, 2005, 18(3): 206- 210.
[10] Sarker N, Chaudhuri B B. An efficient approach to estimate fractal dimension of texture image[J]. Patter Recognition, 1992, 25(9): 1035- 1041.

(上接第 38 页)

表 1 的数据也表明了在不同参数下投资者的停止决策临界值及停止决策的最大期望节约付出.如当房价波动率为 10%,期望增长率为 1%,无风险利率为 2%,融资利率为 6%,拥有房产而产生的每年平均支出为 0.2 万元,年租金为 2 万元和初始房价为 30 万元时,投资者应立即做出停止决策(购买住房),这样比起终身租房可少支付 23.05 万元.而当房价波动率为 10%、期望增长率为 5%,无风险利率为 1% 融资利率为 5%,拥有房产而产生的每年平均支出为 0.2 万,年租金为 3 万元和初始房价为 30 万元时,投资者等到房价跌至 28.47 万元是做出停止决策.这样比起终身

租房可少支付 198.8 万元.因此,通过此模型可以帮助投资者做出投资决策.

参考文献:

[1] 蔡晓钰, 陈 忠, 蔡晓东, 等. 个人房产投资的相机策略及其可达性: 一个最优停时分析框架[J]. 数量经济技术经济研究, 2005, 88- 96
[2] 蔡晓钰, 陈 忠, 韩丽川, 等. 个人房地产购置时机选择的最优停时分析[J]. 系统工程, 2005, 23(1): 28- 32
[3] Gotq Tabata M T, Ono T. An asymmetric option game in a duopolistic real estate market[J]. 日本经营工学会论文志, 2005, 56, 1- 11.