文章编号: 1673- 0062(2010) 01- 0032- 04

广义块严格对角占优矩阵的判定

肖秋菊[1,2], 张　娟[1]

(1. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105; 2 湖南交通工程职业技术学院, 湖南 衡阳 421001)

摘　要: 本文给出了判定广义块严格对角占优矩阵的几个充分条件, 并用相应的数值实例说明了这些结果的有效性.

关键词: 广义严格对角占优矩阵; α- 对角占优矩阵; 广义块严格对角占优矩阵; α- 块对角占优矩阵

中图分类号: O151. 21　　文献标识码: A

Criteria for Generalized Block Strictly Diagonally Dominant Matrices

XIAO Qiu-ju[1,2], ZHANG Juan[1]

(1. Department of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;
2 Hunan Technical College of Communications and Engineering, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract In this paper, we obtain several sufficient conditions for identifying generalized block strictly diagonally dominant matrices. Their effectiveness is illustrated by numerical example.

Key words: α- chain diagonally dominant matrix; generalized strictly diagonally dominant matrix; α- chain block diagonally dominant matrix; generalized block strictly diagonally dominant matrix

广义严格对角占优矩阵是一类很重要的特殊矩阵, 它在计算数学和矩阵论的研究中非常重要, 在实际上有着很广泛的应用. 近年来, 国内外许多学者提出了一系列的实用判定条件[1-3]. 本文在文献[4]的基础上, 在点 H - 矩阵判定条件的基础上, 应用矩阵的分块技术, 利用 α- 链对角占优矩阵的性质, 给出了广义块严格对角占优矩阵的几个充分条件.

本文中用 $C^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶复矩阵集合. 设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, $N=\{1,2,\cdots,n\}$, A 的比较矩阵为 $\mu(A)=(m_{ij})_{n\times n}$, 其中

$$m_{ij}=\begin{cases}|a_{ii}|, & i=j\\ -|a_{ij}|, & i\neq j\end{cases}$$

定义 1　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 $|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $\forall i\in N$, 则称 A 为对角占优矩阵, 记为 $A\in$

收稿日期: 2009- 11- 23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10971176)
作者简介: 肖秋菊 (1967-)女, 湖南衡阳人, 湖南交通工程职业技术学院副教授, 湘潭大学硕士研究生. 主要研究方向: 高等代数.

D_0; 若 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $\forall i\in N$, 则称 A 为严格对角占优矩阵, 记为 $A\in D$; 若存在正对角矩阵 X, 使得 AX 为严格对角占优矩阵, 则称 A 为广义严格对角占优矩阵, 记为 $A\in D^*$.

定义 2　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若存在 $\alpha\in(0,1]$, 使 $|a_{ii}|\geqslant(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)^{\alpha}(\sum_{j\neq i}|a_{ji}|)^{1-\alpha}$, $\forall i\in N$, 则称 A 为 α-链对角占优矩阵, 记为 $A\in D_0(a)$; 若 $|a_{ii}|>(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)^{\alpha}(\sum_{j\neq i}|a_{ji}|)^{1-\alpha}$, $\forall i\in N$, 则称 A 为严格 α-链对角占优矩阵, 记为 $A\in D(a)$; 若存在正对角矩阵 X, 使得 AX 为严格 α-链对角占优矩阵, 则称 A 为广义严格 α-链对角占优矩阵, 记为 $A\in D^*(\alpha)$.

定义 3　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$ 是可约的, 若存在一个置换矩阵 P, 使得 $PAP^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}D_1 & D_2\\ 0 & D_3\end{pmatrix}$, 其中 D_2, D_3 为方阵. 否则称矩阵为不可约矩阵.

定义 4　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 若 $|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$, $\forall i\in N$, 且至少有一个严格不等式成立, $\forall i\in J\equiv\{i\in N:|a_{ii}|=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$ 存在非零元素链 $a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_tj}$, 满足 $|a_{jj}|>\sum_{t\neq j}|a_{jt}|$, $\forall i\in N$, 则称为 A 具有非零元素链对角占优矩阵. 显然, 不可约对角占优矩阵一定是具有非零元素链对角占优矩阵.

把 A 分块为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk}\end{pmatrix}\qquad(1)$$

这里 $A_{ii}(1\leqslant i\leqslant k)$ 为 n_i 阶方阵, $\sum_{i=1}^{k}n_i=n$. 如果 $A_{ii}(1\leqslant i\leqslant k)$ 均非奇异, 记 $T(A)=(t_{ij})_{k\times k}$, 其中

$$t_{ij}=\begin{cases}\|A_{ii}\|^{-1}, & i=j\\ -\|A_{ij}\|, & i\neq j\end{cases}\quad 1\leqslant i, j\leqslant k$$

记 $K=\{1,2,\cdots,k\}$, $\Lambda_i(A)=\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|$, $S_i(A)=\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|$, $\forall i, j\in K$. 在本文中, 如无特殊说明, 总假定 $A_{ii}\neq 0$, $\forall i\in K$; $\Lambda_i\triangleq\Lambda_i(A)\neq 0$, $S_i\triangleq S_i(A)\neq 0$, $\forall i\in K$. 本文中 $\|\cdot\|$ 为向量范数诱导的矩阵范数[5].

定义 5　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 分块如式(1), 若 $A_{ii}(1\leqslant i\leqslant k)$ 均非奇异, 且

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|,\ i=1,2,\cdots,n,\qquad(2)$$

则称 A 为块对角占优矩阵, 记为 $A\in BD_0$; 如果式(2)中的不等号均为严格不等号, 则称 A 为块严格对角占优矩阵, 记为 $A\in BD$; 若存在一组正数 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 使得 $\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|x_j<x_i\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}$ $(1\leqslant i\leqslant k)$ 严格成立, 则称 A 为广义块严格对角占优矩阵, 记为 $A\in BD^*$.

定义 6　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 分块如式(1), 若存在 $\alpha\in(0,1]$, 使

$$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant(\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}(\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|)^{1-\alpha},$$
$$i=1,2,\cdots,n,\qquad(3)$$

则称 A 为 α-链块对角占优矩阵, 记为 $A\in BD_0(\alpha)$; 如果式(3)中的不等号均为严格不等号, 则称 A 为严格 α-链块对角占优矩阵, 记为 $A\in BD(\alpha)$; 若存在一组正数 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 使得

$$(\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}(\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|)^{1-\alpha}x_j<x_i\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}$$
$$(1\leqslant i\leqslant k)\qquad(4)$$

严格成立, 则称 A 为广义严格 α-链块对角占优矩阵, 记为 $A\in BD^*(\alpha)$.

定义 7　设 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 分块如式(1), 若 $T(A)$ 是不可约的, 则称 A 是块不可约的; 若 $T(A)$ 存在非零元素链, 则称 A 存在块形式的非零元素链.

1　主要结果

引理 1[2]　设 $A\in C^{n\times n}$, $\alpha\in(0,1]$, 则 $A\in D^*(\alpha)$ 的充分必要条件是 $A\in D^*$.

引理 2[2]　设 $\alpha\in(0,1]$, $A\in D_0(\alpha)$, 若对满足 $|a_{ii}|=(\sum_{j\neq i}|a_{ij}|)^{\alpha}(\sum_{j\neq i}|a_{ji}|)^{1-\alpha}$ 的每个顶点 i, A 都有非零元素链 $a_{ii_1}, a_{i_1i_2}, \cdots, a_{i_tj}$ 使得 $j\in J_{\alpha}(A)=\{j\in N\,|\,|a_{jj}|>(\sum_{t\neq j}|a_{jt}|)^{\alpha}(\sum_{t\neq j}|a_{tj}|)^{1-\alpha}\}\neq\varnothing$, 则 $A\in D^*$.

引理 3　设 $\alpha\in(0,1]$, $A\in D_0(\alpha)$ 且 A 不可约, $J_{\alpha}(A)\neq\varnothing$, 则 $A\in D^*$.

引理 4　$A\in C^{n\times n}$, 分块如式(1), 若存在正对角矩阵 D, 使 $T(A)D\in D^*$, 则 $A\in BD^*$.

证明　若 $T(A)D\in D^*$, 则存在正对角矩阵 D_1, 使 $T(A)DD_1\in D$, 而 DD_1 仍为正对角矩阵, 所以 $T(A)$ 是广义严格对角占优矩阵, 即 $A\in BD^*$.

证毕.

引理5 设$A\in C^{n\times n}$, $\alpha\in(0,1]$, 分块如式(1), 则$A\in BD^*(\alpha)$的充分必要条件是$A\in BD^*$.

证明 由于$A\in BD^*(\alpha)$, 则$T(A)\in D^*(\alpha)$. 根据引理1, $T(A)\in D^*(\alpha)$的充分必要条件是$T(A)\in D^*$, 即$A\in BD^*$.

引理6 设$\alpha\in(0,1]$, $A\in BD_0(\alpha)$且A块不可约, 分块如式(1), $J_\alpha(T(A))\neq\emptyset$, 则$A\in BD^*$.

证明 由于$A\in BD_0(\alpha)$, 则$T(A)\in D_0(\alpha)$. 根据引理3, $T(A)\in D^*$, 即$A\in BD^*$.

引理7[6] 设σ, τ是任意两个非负实数, $\alpha\in[0,1]$, 则有$\alpha\tau+(1-\alpha)\sigma\geqslant\tau^\alpha\sigma^{1-\alpha}$.

定理1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 分块如式(1), 若存在某一$\alpha\in(0,1]$, 有

$$\sigma_\infty^{(\alpha)}\triangleq\sum_{i=1}^n P_i^{(\alpha)}\triangleq\sum_{i=1}^n\frac{\alpha(\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}}{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)(\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}}<1$$

和$\forall i\in K$, $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)(\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}>0$, 则$A\in BD^*$.

证明 由于$\sigma_\infty^{(\alpha)}<1$, 于是$\theta=\dfrac{1-\sigma_\infty^{(\alpha)}}{n}>0$. 显然有$\sum\limits_{i=1}^n(P_i^{(\alpha)}+\theta)=1$, 且$0<P_i^{(\alpha)}+\theta<1(\forall i\in K)$. 取正对角矩阵$D=diag(d_i\mid d_i=P_i^{(\alpha)}+\theta, i\in K)$, 记$B=T(A)D=(B_{ij})_{n\times n}$, 则对$\forall i\in K$, 有

$$\|B_{ii}^{-1}\|^{-1}-\Lambda_i^\alpha(B)S_i^{1-\alpha}(B)=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-(\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|d_j)^\alpha(\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|d_i)^{1-\alpha}\geqslant\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|\sum_{j\neq i}d_j)^\alpha d_i^{1-\alpha}S_i^{1-\alpha}$$

$$=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-[\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|(\sum_{j=1}^n d_j-d_i)]^\alpha d_i^{1-\alpha}S_i^{1-\alpha}$$

$$=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha(1-d_i)^\alpha d_i^{1-\alpha}S_i^{1-\alpha}$$

$$\geqslant\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha[\alpha(1-d_i)+(1-\alpha)d_i]S_i^{1-\alpha}$$

$$=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i+(2\alpha-1)(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}d_i-\alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}$$

$$=d_i[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)\times(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}]-\alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}$$

$$=(P_i^{(\alpha)}+\theta)[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)\times(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}]-\alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}$$

$$=\alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}+\theta[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}]-\alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}$$

$$=\theta[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)\times(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}]>0$$

即$\forall i\in K$, 有$\|B_{ii}^{-1}\|^{-1}>\Lambda_i^\alpha(B)S_i^{1-\alpha}(B)$成立, 故$B$是严格$\alpha$-链对角占优矩阵, A是广义严格α-链块对角占优矩阵, 由引理5可知, $A\in BD^*$.

证毕.

推论1 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 分块如式(1), 若

$$\sigma_\infty\triangleq\sum_{i=1}^n\frac{\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|}{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|}<1$$

则$A\in BD^*$.

证明 在定理1中取$\alpha=1$即得.

证毕.

定理2 设$A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$, 且$A$块不可约, 分块如式(1), 若存在一个$\alpha\in(0,1]$使

$$\sum_{i=1}^n P_i^{(\alpha)}\triangleq\sum_{i=1}^n\times\frac{\alpha(\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}}{\|A_{ii}^{-1}\|+(2\alpha-1)(\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}}\leqslant1$$

和$\forall i\in K$, $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}+(2\alpha-1)\times(\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^\alpha S_i^{1-\alpha}>0$, 且存在$i_0\in K$, $\max\limits_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|\neq\min\limits_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|$. 则$A\in BD^*$.

证明 当$\sum\limits_{i=1}^n P_i^{(\alpha)}<1$时, 由定理1可知结论成立. 因此不妨假定$\sum\limits_{i=1}^n P_i^{(\alpha)}=1$. 由于$A$是块不可约矩阵, 易知$\max\limits_{j\neq i}\|A_{ij}\|\neq0$. 若不然, $A_{ij}=0(\forall j\in K, j\neq i)$, 于是$A$有一个$1\times(k-1)$的零子矩阵, 与$A$块不可约矛盾, 从而$\forall i\in K$, $P_i^{(\alpha)}>0$. 构造正对角矩阵$D=diag(d_i\mid d_i=P_i^{(\alpha)}, j\in K)$, 并记$B=T(A)D=(B_{ij})_{n\times n}$, 则对$\forall i\in K$, 类似于定理1的证明, 有

$$\|B_{ii}^{-1}\|^{-1}-\Lambda_i^\alpha(B)S_i^{1-\alpha}(B)=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-(\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|d_i)^\alpha\times(\sum_{j\neq i}\|A_{ji}\|d_i)^{1-\alpha}$$

$$\geqslant\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i-(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|\sum_{j\neq i}d_j)^\alpha d_i^{1-\alpha}S_i^{1-\alpha}$$

$= \|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i - (\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}(1-d_i)^{\alpha}\times d_i^{1-\alpha}S_i^{1-\alpha}$

$\geqslant \|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i - (\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}[\alpha(1-d_i)+(1-\alpha)d_i]S_i^{1-\alpha}$

$= d_i[\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} + (2\alpha-1)(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}\times S_i^{1-\alpha}] - \alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}S_i^{1-\alpha} = 0$

即 $\forall i\in K$, 有 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant \Lambda_i^{\alpha}(B)S_i^{1-\alpha}(B)$成立, 故 $B\in BD_0(\alpha)$. 又因为存在 $i_0\in K$, 使得$\max_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|\neq \min_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|$. 由上面的证明过程易知

$\|B_{i_0i_0}^{-1}\|^{-1} - \Lambda_{i_0}^{\alpha}(B)S_{i_0}^{1-\alpha}(B) > \|A_{i_0i_0}^{-1}\|^{-1}d_{i_0} - (\max_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|\sum_{j\neq i_0}d_j)^{\alpha}d_{i_0}^{1-\alpha}S_{i_0}^{1-\alpha}\geqslant d_{i_0}[\|A_{i_0i_0}^{-1}\|^{-1} + (2\alpha-1)(\max_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|)^{\alpha}\times S_{i_0}^{1-\alpha}] - \alpha(\max_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|)^{\alpha}S_{i_0}^{1-\alpha} = 0$

即 $\|B_{i_0i_0}^{-1}\|^{-1} > \Lambda_{i_0}^{\alpha}(B)S_{i_0}^{1-\alpha}(B)$成立, 于是 $J_{\alpha}(B)\neq \emptyset$. 而一个不可约矩阵右乘一个正对角矩阵不会改变其不可约性, 由已知条件 $B = T(A)D$不可约.

综上, 由引理 6可知, B是广义严格对角占优矩阵, 进而由引理 4知, $A\in BD^*$. 证毕.

推论 2 设$A = (a_{ij})\in C^{n\times n}$, 且$A$块不可约, 分块如(1), 若

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|}{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} + \max_{j\neq i}\|A_{ij}\|}\leqslant 1$$

且存在 $i_0\in K$, $\max_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|\neq \min_{j\neq i_0}\|A_{i_0j}\|$, 则 $A\in BD^*$.

证明 在定理 2中取 $\alpha = 1$即得. 证毕.

3 数值实例

例 设

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 6 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34}\\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11} = A_{33} = A_{44} = 6$, $A_{13} = A_{14} = A_{34} = A_{41} = 1$, $A_{31} = 3$, $A_{43} = 4$, $A_{12} = A_{32} = (1\quad 0)$, $A_{21} = A_{23} = A_{24} = (1\quad 0)^{\mathrm{T}}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$.

则 $\sum_{i=1}^{4}\frac{\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|}{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} + \max_{j\neq i}\|A_{ij}\|} = \frac{107}{105} > 1$. 若取 $\alpha = \frac{1}{2}$, 则

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\alpha(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}S_i^{1-\alpha}}{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} + (2\alpha-1)(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}S_i^{1-\alpha}} = \frac{\sqrt{5}+2+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{12}\leqslant 1$$

且 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1} + (2\alpha-1)(\max_{j\neq i}\|A_{ij}\|)^{\alpha}S_i^{1-\alpha} = \|A_{ii}^{-1}\|^{-1} > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$

满足定理 1的条件, 故 $A\in BD^*$

参考文献:

[1] 徐 仲, 陆 全. 判定广义严格对角占优矩阵的一组充分条件[J]. 工程数学学报, 2001, 18(3): 11-15

[2] Sun Yuxiang. An improvement on a theorem by Ostrowski and its applications[J]. Northeastern Math, 1991, 7(4): 497-502

[3] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sicences[M]. New York: Academic press, 1979.

[4] 莫宏敏, 刘建州. 广义严格对角占优矩阵与非奇异M-矩阵的判定[J]. 工程数学学报, 2007, 24(6): 1125-1128.

[5] Kolotilina Lu L. Nonsingulartiy/singulartiy criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2003, 359: 133-159.

[6] 徐成贤, 徐宗本. 矩阵分析[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1991.