文章编号: 1673-0062(2010)01-0029-03

一类二阶半线性时滞微分方程的振动准则

钟记超[1,2], 欧阳自根[1,2], 郝振府[1]

(1.南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001; 2.南华大学 核能经济与管理研究中心,湖南 衡阳 421001)

摘 要: 建立一类二阶半线性时滞微分方程的几个振动准则. 利用一个新的方法,得到所有解振动的一些充分条件,新的结论改善和推广了一些相关文献的振动准则,给出的例子用来阐明新的结论.

关键词: 半线性; 时滞微分方程; 振动; 最终正解

中图分类号: O175 文献标识码: A

Oscillation Criteria for a Class of Second-order Euasilinear Delay Differential Equations

ZHONG Ji-chao[1,2], OUYANG Zi-gen[1,2], HAO Zhen-fu[1]

(1. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan 421001, China;
2. Center of Nuclear Energy Economy and Management, University of South China, Hengyang Hunan 421001, China)

Abstract Several oscillation criteria for a class of second-order quasilinear delay differential equation are established in this paper. Using a new method, some sufficient conditions for the oscillation of all solutions are given, and new results improve and extend some similar oscillation criteria. Example is inserted to illustrate the results.

Key words Quasilinear; Delay differential equation; Oscillation; Eventually positive solution

0 引言

考虑如下的二阶半线性时滞微分方程:

$$(r(t)\varphi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))' + q_0(t)\times|x(\tau_0(t))|^{\alpha-1}x(\tau_0(t)) + \sum_{i=1}^{n}q_i(t)|x(\tau_i(t))|^{\beta_i-1}\times x(\tau_i(t)) = 0, t\geqslant t_0 \quad (1)$$

其中 n 是偶数, $\beta_n > \beta_{n-2} > \cdots > \beta_2 > \alpha > \beta_{n-1} > \beta_{n-3} > \cdots > \beta_1$ 是正的常数, $r(t)\in C^1([t_0,\infty);R^+)$, $q_i(t)\in C([t_0,\infty);R^+)$ $(i=0,1,\cdots,n)$. 并且假设存在正常数 M 使得 $0<\varphi(x)<M^{-1}$, 同时

收稿日期: 2009-09-25
基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目(07JJ3130); 南华大学学科带头人基金资助项目(2007XQD13); 南华大学博士启动基金资助项目(5-XQD-2006-9)
作者简介: 钟记超(1985-),男,山东临沂人,南华大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向: 微分方程及其应用.

存在 $\tau(t)\in C^1([t_0,\infty);R^+)$ 使得 $\tau(t)\leqslant\tau_i(t)(i=0,1,\dots,n)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$ 而且 $\tau'(t)\geqslant 0$ 对所有的 $t\in[t_0,\infty)$.

式(1)的一个解 $x(t)$ 称为振动的,是指它有任意大的零点,否则就称为非振动的.方程(1)称为振动的,是指它的所有解振动.

二阶时滞微分方程广泛地应用于很多学科,在这里,仅仅讨论它的解振动的充分条件.最近,二阶时滞微分方程的解的振动性研究吸引了众多作者的注意[1-10].如,2004年,Li和Zhao[1]获得了如下方程的振动准则:

$$(a(t)(y'(t))^\sigma)'+p(t)(y'(t))^\sigma+q(t)f(y(t))=0,\ t\geqslant t_0 \tag{2}$$

不过他们证明的定理条件有些严格.

2008年,Rogovchenko和Tuncay[2]通过引入函数 $H(t,s)$ 获得了下面方程的振动准则:

$$(r(t)y'(t))'+p(t)y'(t)+q(t)f(y(t))=0,\ t\geqslant t_0 \tag{3}$$

2009年,Ye和Xu[3]研究了如下中立型方程的振动准则:

$$(r(t)\psi(x(t))|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t))'+q(t)f(x(\sigma(t)))=0,\ t\geqslant t_0 \tag{4}$$

其中 $y(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$, $0\leqslant p(t)\leqslant 1$.但是Ye和Xu[3]在条件 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)<\infty$ 时的定理证明是错误的.

同时,Zheng等人[4]得到了一个类似(1)的强迫方程的振动准则:

$$(r(t)|y'(t)|^{\alpha-1}y'(t))'+p(t)|y(t)|^{\alpha-1}\times y(t)+\sum_{j=1}^m q_j(t)|y(t)|^{\beta_j-1}y(t)=e(t),\ t\geqslant t_0 \tag{5}$$

特别是最近,Sun和Meng[5]研究了如下方程的振动准则:

$$(r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))'+q_0(t)|x(\tau_0(t))|^{\alpha-1}\times x(\tau_0(t))+q_1(t)|x(\tau_1(t))|^{\beta-1}x(\tau_1(t))+q_2(t)|x(\tau_2(t))|^{\gamma-1}x(\tau_2(t))=0,\ t\geqslant t_0 \tag{6}$$

本文的目的借助于新的方法,推广了方程(6)的解振动的充分条件.

1 引理

引理1 假设 α_i, k_i 是正的常数,而且 $\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{k_i}=1(i=1,2,\dots,n)$,则

$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{k_i}\geqslant\prod_{i=1}^n a_i^{1/k_i}.$$

证明:假设 $f(x)$ 是一个在区间 $(0,\infty)$ 上的凹函数.令 $a=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$, $b=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}$,则 $\alpha_i\in[a,b]$,由凹函数的性质,得到

$$f\Big(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{k_i}\Big)\geqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{k_i}f(a_i).$$

令 $f(x)=\ln x$,那么,$f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的凹函数和增函数,所以

$$\ln\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{k_i}\geqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{k_i}\ln a_i=\sum_{i=1}^n\ln a_i^{1/k_i}=\ln\prod_{i=1}^n a_i^{1/k_i}$$

从而

$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{k_i}\geqslant\prod_{i=1}^n a_i^{1/k_i}$$

证毕.

2 主要定理

定理2 如果

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=\infty \tag{7}$$

而且存在一个连续的正函数 $\rho(t)$ 使得

$$\int_{t_0}^{\infty}\Big[\rho(t)Q(t)-\frac{1}{M(\alpha+1)^{\alpha+1}}\times\frac{(\rho'_+(t))^{\alpha+1}r(\tau(t))}{\rho^\alpha(t)(\tau'(t))^\alpha}\Big]\mathrm{d}t=\infty \tag{8}$$

其中

$$R(t)=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{r^{1/\alpha}(s)}\mathrm{d}s \tag{9}$$

$$Q(t)=q_0(t)+\prod_{i=1}^n[k_iq_i(t)]^{1/k_i} \tag{10}$$

$$k_1=\frac{\beta_n-\beta_1}{\beta_2-\alpha},\ k_i=\frac{\beta_n-\beta_1}{\beta_{i+1}-\beta_{i-1}}(i=2,3,\dots,n-1),\ k_n=\frac{\beta_n-\beta_1}{\alpha-\beta_{n-1}} \tag{11}$$

$$\rho'_+(t)=\max\{0,\rho'(t)\} \tag{12}$$

则(1)的任意解振动.

证明:假设(1)有一个非振动解 $x(t)$,不失一般性,设 $x(t)$ 是一个最终正解(如果为最终负解,其证明过程类似).从而存在一个 $t_1\geqslant t_0$ 使得 $x(t)>0$ 对所有 $t\geqslant t_1$ 成立.根据(1),得到

$$(r(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t))'\leqslant 0,\ t\geqslant t_1,$$

因此,$r(t)\psi(x(t))|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)$ 是一个递减函数,下证 $x'(t)>0$.否则,$x'(t)\leqslant 0$,这就使得

$$(r(t)\psi(x(t))(-x'(t))^\alpha)'=(r(t)\psi(x(t))\times|-x'(t)|^{\alpha-1}(-x'(t)))'\geqslant 0,$$

又因为 $r(t)\ddot{i}(x(t))(-x'(t))^{\alpha}>0$,
故, 存在一个 $L>0$和 $t_2\geqslant t_1$使得

$$r(t)\ddot{i}(x(t))(-x'(t))^{\alpha}\geqslant L,\ t\geqslant t_2,$$

所以

$$-x'(t)\geqslant(ML)^{\alpha}\frac{1}{r^{1/\alpha}(t)},\ t\geqslant t_2,$$

对上式两边从 t_2到 t积分, 并令 $t\to\infty$, 利用式(7)和式(9), 得到 $\lim_{t\to\infty}x(t)\leqslant-\infty$, 这与 $x(t)$是最终正解矛盾. 因此 $x'(t)>0$, $t\geqslant t_2$. 由于

$$(r(t)\ddot{i}(x(t))(x'(t))^{\alpha})'\leqslant 0,$$

所以

$$r(t)\ddot{i}(x(t))(x'(t))^{\alpha}$$
$$\leqslant r(\tau(t))\ddot{i}(x(\tau(t)))(x'(\tau(t)))^{\alpha},\ t\geqslant t_2,$$

蕴含出

$$\frac{x'(\tau(t))}{x'(t)}\geqslant\left(\frac{r(t)\ddot{i}(x(t))}{r(\tau(t))\ddot{i}(x(\tau(t)))}\right)^{1/\alpha},\ t\geqslant t_2, \tag{13}$$

定义

$$u(t)=\rho(t)\frac{r(t)\ddot{i}(x(t))(x'(t))^{\alpha}}{x^{\alpha}(\tau(t))} \tag{14}$$

则 $u(t)>0$, 利用式(1), 式(13)和 $x'(t)>0$, 对式(14)求导, 得

$$u'(t)\leqslant\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}u(t)-\alpha\rho(t)\times\frac{r(t)\ddot{i}(x(t))(x'(t))^{\alpha}}{x^{\alpha+1}(\tau(t))}x'(\tau(t))\tau'(t)-\rho(t)[q_0(t)+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)x^{\beta_i-\alpha}(\tau(t))]\leqslant\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}u(t)-\frac{\alpha M^{1/\alpha}\tau'(t)}{(\rho(t)r(\tau(t)))^{1/\alpha}}u^{(\alpha+1)/\alpha}(t)-\rho(t)[q_0(t)+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)x^{\beta_i-\alpha}(\tau(t))]. \tag{15}$$

定义

$$F(s)=\frac{\rho'_+(t)}{\rho(t)}s-\frac{\alpha M^{1/\alpha}\tau'(t)}{(\rho(t)r(\tau(t)))^{1/\alpha}}s^{(\alpha+1)/\alpha},\quad s>0$$

易得, $F'(s_0)=0$, $F''(s_0)<0$, 其中 $s_0=\frac{1}{M(\alpha+1)^{\alpha}}\frac{(\rho'_+(t))^{\alpha}}{\rho^{\alpha-1}(t)}\frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^{\alpha}}$.

所以, $F(s)$在 s_0取得最大值. 即

$$F(s)\leqslant F(s_0)=\frac{1}{M(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{(\rho'_+(t))^{\alpha+1}}{\rho^{\alpha}(t)}\times\frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^{\alpha}}. \tag{16}$$

令

$$a_i=k_iq_i(t)x^{\beta_i-\alpha}(\tau(t)),$$

其中 $k_i(i=1,2,\cdots,n)$如式(11)所定义. 利用引理 1结合式(16), 得到

$$u'(t)\leqslant\frac{1}{M(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{(\rho'_+(t))^{\alpha+1}}{\rho^{\alpha}(t)}\frac{r(\tau(t))}{(\tau'(t))^{\alpha}}-\rho(t)Q(t),$$

对上式两边从 t_2到 t积分, 并令 $t\to\infty$, 利用(8), 推出

$$0<\lim_{t\to\infty}u(t)\leqslant-\infty.$$

这是一个矛盾, 证毕.

注 3 Sun和 Meng[5] 中的定理 2是本文定理 2的特例, 此时选择 $\rho(t)=R^{\alpha}(\tau(t))$.

3 例子

例子 考虑如下二阶半线性时滞微分方程:

$$((x'(t))^3)'+(3-\sin^2 t)x^3(t-\pi)+3x(t-2\pi)+x^5(t-3\pi)=0, \tag{17}$$

经计算得 $Q(t)=3-\sin^2 t+2\sqrt{3}$, 取 $\tau(t)=t-3\pi$, $\rho(t)=(t-3\pi)^3$, 则方程式(17)满足定理 2的所有条件, 所以, 式(17)的任意解振动.

实际上, $x(t)=\sin t$就是式(17)的一个振动解.

参考文献:

[1] Li Wantong, Zhao Peihao. Oscillation theorems for second-order nonlinear differential equations with damped term[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 39: 457-471.

[2] Rogovchenko Y V, Tuncay F. Oscillation criteria for second-order nonlinear differential equation with dampinf[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 69: 208-221.

[3] Ye Luhong, Xu Zhiting. Oscillation criteria for second order quasilinear neutral delay differential equations[J]. Applied and Mathematics and Computation, 2009, 207: 388-396.

[4] Zheng Zhaowen, Wang Xiao, Han Hongmei. Oscillation criteria for forced second order differential equations with mixed nonlinear linearities[J]. Applied and Mathematics Letters, 2009, 22: 1096-1101.

[5] Sun Yuangong, Meng Fanwei. Oscillation of second-order delay differential equations with mixed nonlinearities[J]. Applied and Mathematics and Computation, 2009, 207: 135-139.