文章编号: 1673- 0062(2010) 01- 0024- 05

非定常渗流计算的移动网格方法

李阳贵[1], 王礼广[1*], 魏华祎[2], 肖仁成[3]

(1. 南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001; 2. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105;
3. 南华大学 城市建设学院, 湖南 衡阳 421001)

摘　要: 本文应用一种基于调和映射的移动网格方法计算非定常渗流, 该方法将偏微分方程求解与网格移动算法分开, 且需要在新生成的网格上插值更新解. 本文通过计算一个关于梯度的控制函数, 使得网格加密与希疏化是随着水力梯度的变化自动实现的. 从而提高整体解的精度.

关键词: 非定常渗流; 有限元; 移动网格方法; 控制函数

中图分类号: O241. 82; TV139. 14　　　文献标识码: A

Moving Mesh Method for Unsteady Seepage Computations

LI Yang-gui[1], WANG Li-guang[1*], WEI Hua-yi[2], XIAO Ren-cheng[3]

(1. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan 421001, China;
2. School of Mathematics and Computing Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;
3. School of Urban Construction, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper applies moving grid method based on harmonic maps to calculate unsteady seepage, which delinks the PDE solver and the mesh- moving algorithm and then requires interpolating the solution on the newly generated mesh. In this paper, it makes the mesh refined or coarsened self- fulfilling based on the change of hydraulic gradient by calculating a monitor function on gradient so as to enhance the accuracy of the solution.

Key words: unsteady seepage; finite element; moving mesh method; monitor function

0　引言

主要的自适应网格方法有三类, 分别为 h- 方法, p- 方法和 r- 方法. h- 方法, 也就是网格加密的方法, 通过改变节点数目和单元尺寸达到提高网格求解精度目的. p- 方法, 是在局部使用高阶元的方法, 通过增加单元的多项式插值阶数提高求解精度. r- 方法, 就是移动网格方法, 它既不提高单元的插值阶数, 也不改变节点总数, 它是通过改变节点的位置达到反映结构特征的目的. 自适应方法已经在渗流计算中得到一定程度上的应用推广[1- 3], 他们主要是应用 h- 方法. h- 方法在定常渗流计算中所取得的效果是明显的, 但是对于非定常渗流, h- 方法在应用上就有些困难

收稿日期: 2009- 12- 15

作者简介: 李阳贵 (1981-), 男, 广东化州人, 南华大学数理学院硕士研究生. 主要研究方向: 数值计算. * 通讯作者.

了. 非定常渗流的数学模型是一个发展方程, 它的各要素都是与时间相关的, 移动网格方法正是为计算发展方程而设计的一种自适应方法.

1　移动网格方法

Dvinsky于 1991年提出了基于调和映射的自适应网格生成方法[4], 2001年李若等学者将该方法发展为一种基于调和映射的移动网格方法[5]. 这种方法将网格移动和方程求解完全分开, 从而我们在利用这个方法的过程中, 只需构造一个合适我们的问题的控制函数即可, 在程序设计上便于实现. 在移动网格方法中, 需要引进一个逻辑区域, 网格的移动通过一个由物理区域到逻辑区域的变换来实现, 物理区域就是计算问题的实际区域. 在我们这个要计算的渗流问题中, 物理区域是一个渗流场 D. 逻辑区域是引进的一个参考区域. 在这里把我们所取的逻辑区域记为 D_C. 我们这里利用的变换是调和映射.

调和映射是由 Fuller于 1944年提出的, 后来在数学物理等领域得到广泛应用, 也应用到自适应网格生成领域[4]. 调和映射是能量泛函 $E: C^{\infty}(D, D_C) \to R$ 的临界点, 它是调和函数与极小子流形的推广. 能量泛函的 Euler- Lagrange方程为

$$\triangle_{L-B}\xi^k + G^{ij}\Gamma^k_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^j} = 0 \tag{1}$$

其中, $\triangle_{L-B}$ 是 Laplace- Beltrin 算子, G^{ij} 是局部坐标系 x^n 的 Rieman度量, $\Gamma^k_{\alpha\beta}$ 是 D 上的联络系数.

调和映射的首要问题是存在性、唯一性及正则性. Hamilton, Schoen, Yau等分别在文献[6]和文献[7]中建立了比较完善的存在性和唯一性的定理, 定理指出:

若 (ⅰ) D_C 的曲率是非正的;

(ⅱ) ∂D_C 关于 D_C 上的度量是凸的;

则对于任意的从 D 到 D_C 的同胚 $\ddot{\imath}$, 都存在唯一的一个调和映射 ξ从 D 到 D_C 满足 $\xi|_{\partial D} = \ddot{\imath}|_{\partial D}$.

存在唯一性的结论有利于避免网格缠绕, 但是其中的第二个条件要求逻辑区域为凸区域, 导致这种移动网格方法不能直接应用到多连通区域上的计算.

控制函数是在计算区域上给定的一个正定的函数矩阵, 它是自适应网格方法的关键因素. 控制函数在变分形式上用来控制网格的质量, 并使网格与物理解相互联系起来. 事实上是要将物理区域上的度量用控制函数来构造, 将物理区域上的度量矩阵取为控制函数的逆. 对于控制函数的构造, 在通常的方法中是用数值解的梯度来衡量哪个地方的解改变得快, 从而将网格集中在那里. 也有将控制函数与误差估计联系在一起的[8], 还有关于方向导数的控制函数[9], 其原理和关于梯度的控制函数是一样的. 在我们的渗流计算中, 水力梯度是反映水头变化的最重要且直接的因素, 水力梯度的大小直接反映了水头变化的激烈程度, 从而决定渗流场单元划分的密疏程度, 于是我们构造一个如下的梯度控制函数

$$M = [0.1 + (\nabla H_h)^2] I \tag{2}$$

其中 I是单位矩阵.

网格的移动还要通过移动向量场来实现。假设已经得到时刻 t的物理网格 T_t (其结点记为 X^i_t) 和网格上的水头函数 $H_h(t)$, 通过计算控制函数 M, 在网格 T_t 上求解椭圆方程组

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(G^{ij}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^j}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\xi|_{\partial D} = \xi_b$$

即可得到渗流场网格的节点 X^i_t 在调和映射下的像 ξ^i, 进而得到它与逻辑网格之间的差 $\delta\xi^* = \xi^i - \xi$, 这就是在逻辑网格上的一个分片线性的向量场 $\delta\xi$, 利用逻辑网格到渗流场网格上的变换的一阶导数, 将它插值为渗流场网格上的一个分片性的向量场, 从而得到渗流场上的每个节点的移动方向 $\delta X^{i,*}$, 于是将渗流场网格的节点更新为

$$X^i_t := X^i_t + \eta\delta X^{i,*} \tag{4}$$

其中 η是网格移动的步长.

实现网格移动得到了新网格以后, 再在新网格上进行插值, 更新水头函数 H_h. 为此用基函数将 H_h 表示出来为 $H_h = N_i H_i$, 两个网格之间的不同可以表示为分片线性的向量场 $\delta_x = \delta X_i\lambda^i$, λ^i是线性基函数. 使用节点之间的线性变化

$$X^i(\tau) = X^i_\tau + \tau(X^{i,*}_\tau - X^i_\tau) \quad \tau\in[0, 1] \tag{5}$$

获得一个同伦. 伴随着节点位置的变化, 基函数也将发生相应的变化, 成为 $N_i(\tau)$, 由于基函数完全被网格所确定, 因此将它记为 $N_i(x(\tau))$, 其中

$$x(\tau) = x_0 + \tau(x_1 - x_0) \quad \tau\in[0, 1] \tag{6}$$

这里 x_0是渗流场上的恒等映射, x_1将渗流场中旧网格单元上的点映射到新网格的相应单元上, 并且保持点的面积坐标, 于是 $x_0 - x_1$恰好是网格之间的差异向量场 δx. 从而, 在同伦路径上有一系列的 H_h 近似 $H_h(\tau) = N_i(\tau)H_i(\tau)$, 为了使变换

以后的 H_h 的表示形式能够尽量保持不变, 要求 $H_h(\tau)$ 在离散空间里的弱意义下满足

$$\frac{\partial H_h}{\partial \tau} = 0$$

也就是

$$0 = \int_D \frac{\partial H_h}{\partial \tau} \omega \mathrm{d}x$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial H_i}{\partial \tau} N_i + H_i \frac{\partial N_i}{\partial \tau} \right) \omega \mathrm{d}x$$

这里 ω是检验函数,

$$\frac{\partial N_i}{\partial \tau} = \nabla N_i \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \nabla N_i \cdot (x_1(x) - x_0(x))$$

$$= - \nabla N_i \cdot \delta x \qquad (7)$$

最后解方程

$$\int_D \frac{\partial H_i}{\partial \tau} N_i \omega \mathrm{d}x = \int_D H_i \nabla N_i \cdot \delta_x \omega \mathrm{d}x \qquad (8)$$

便容易得到新网格上的水头.

2 渗流的有限元分析

由雅可布根据质量守恒原理给出的渗流连续性方程和达西定律, 可得到非定常渗流的数学模型[10].

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y + \frac{\partial H}{\partial y}\right) = S_S \frac{\partial H}{\partial t} \\ & H(x, y, t)|_{t=0} = H_0(x, y) \quad (x, y) \in D \\ & H|_{\Gamma_1} = h(x, y, t) \quad (x, y) \in \Gamma_1 \\ & k_x \frac{\partial H}{\partial x}\cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y}\cos(n, y)|_{\Gamma_2} - q(x, y, t) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

和定常渗流的数学模型

$$\left.\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_y + \frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0 \\ & H|_{\Gamma_1} = h(x, y) \quad (x, y) \in \Gamma_1 \\ & k_x \frac{\partial H}{\partial x}\cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y}\cos(n, y)|_{\Gamma_2} - q(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

其中, k_x, k_y 是渗流系数, S_s 为单位贮存量, q 表示边界上单宽流量, n 表示边界的单位外法向量. 在进行非定常渗流计算时, 可先求得开始时刻的定常渗流场的水头分布, 以作为已知初始条件[11].

根据变分原理, 式(9)的解等价于下述泛函求极值

$$I(H) = \iint_D \left\{ \frac{1}{2}\left[k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \right] + S_s H \frac{\partial H}{\partial t} \right\} \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \int_{\Gamma_2} qH \mathrm{d}\Gamma \qquad (11)$$

将渗流场剖分成若干单元后, 渗流场就分解为各个单元之和, Γ_2 边界则分解为一些线元之和。于是泛函(11)相应地分解为有关单元泛函之和

$$I(H) = \sum_{\substack{\sigma=1 \\ e_\sigma \in D}}^{n} \iint_{e_\sigma} \left\{ \frac{1}{2}\left[k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \right] + S_s H \frac{\partial H}{\partial t} \right\} \mathrm{d}x \mathrm{d}y - \sum_{l \in \Gamma_2} \int_l qH \mathrm{d}\Gamma \qquad (12)$$

对所有单元的泛函求得微分后叠加, 并令其等于零(求极小值), 便得汇总方程

$$[K][H] + [S][\dot{H}] = [F] \qquad (13)$$

对时间项取隐式有限差分, 便得到非定常渗流有限元计算公式

$$\{[K]\triangle t + [S]\}[H(t+\triangle t)] = [S][H(t)] + [F]\triangle t \qquad (14)$$

类似地, 可得到定常渗流有限元计算公式

$$[K][H] = [F] \qquad (15)$$

3 算例

下面应用移动网格方法对地下水向承压完整井的非定常运动进行数值模拟. 图(1)是一口承压完全井的示意图, 该井的右边水头高于左边水头, 已知含水层的厚度为 40 m, 渗流系数 $k_x = k_y = 1.9$ (m/h), 单位贮存量 $S_S = 0.02$(1/m), 井内降水前测得 CD的水头为 180 m, 在距离井壁 CD 100 m 处的水头为 150 m. 在这个数值模拟中, 以井的左边区域 ABCD 为研究对象, 以每小时 2 m 的速度对井内实施降水. 由于 AB距离水井较远, 井内的降水对 AB影响很小, 所以在整个降水过程中假设 AB的水头不变. 将上述的数据对应地代入式(9)和式(10)即可求解. 其中一些结果如图(2)~(9).

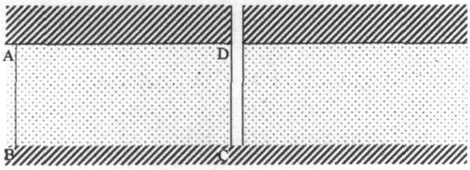

图 1　承压完全井示意图

Fig. 1　Sketch map of confined full - well

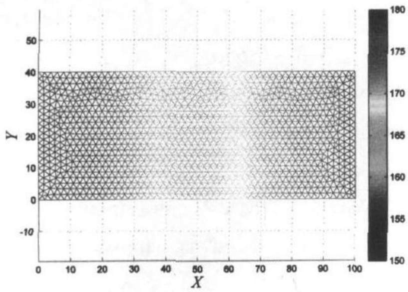

图 2　$t=0$ h 时网格及水头分布(2D)

Fig. 2　Mesh and water head at $t=0$ h (2D)

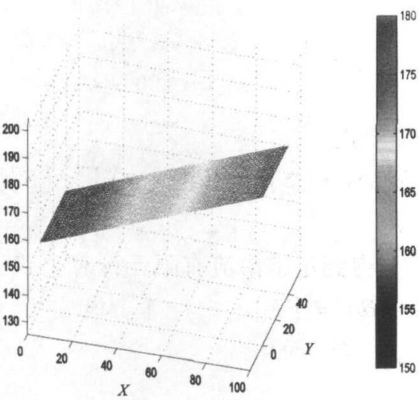

图 3　$t=0$ h 时网格及水头分布(3D)

Fig. 3　Mesh and water head at $t=0$ h(3D)

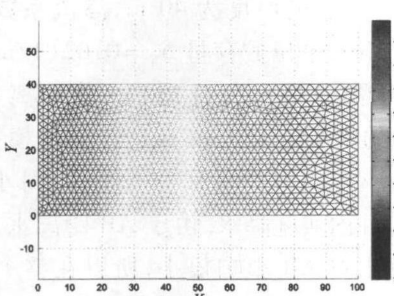

图 4　$t=5$ h 时网格及水头分布(2D)

Fig. 4　Mesh and water head at $t=5$ h(2D)

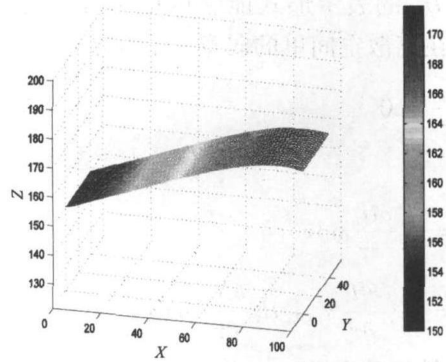

图 5　$t=5$ h 时网格及水头分布(3D)

Fig. 5　Mesh and water head at $t=5$ h(3D)

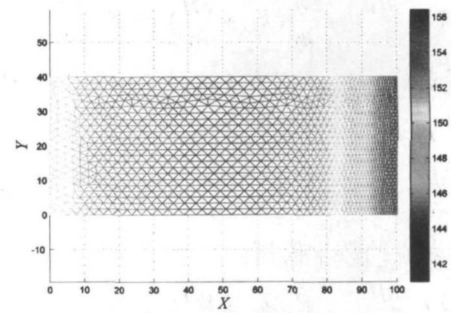

图 6　$t=20$ h 时网格及水头分布(2D)

Fig. 6　Mesh and water head at $t=20$ h(2D)

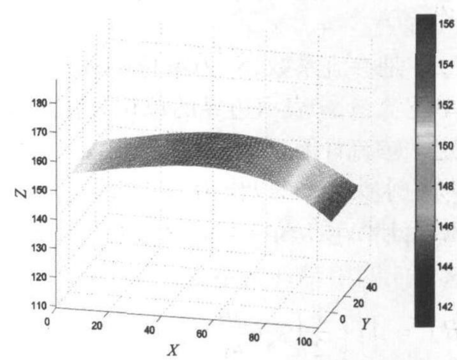

图 7　$t=20$ h 时网格及水头分布(3D)

Fig. 7　Mesh and water head at $t=20$ h(3D)

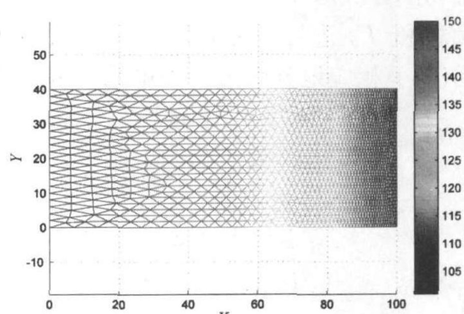

图 8　$t=40$ h 时网格及水头分布(2D)

Fig. 8　Mesh and water head at $t=40$ h (2D)

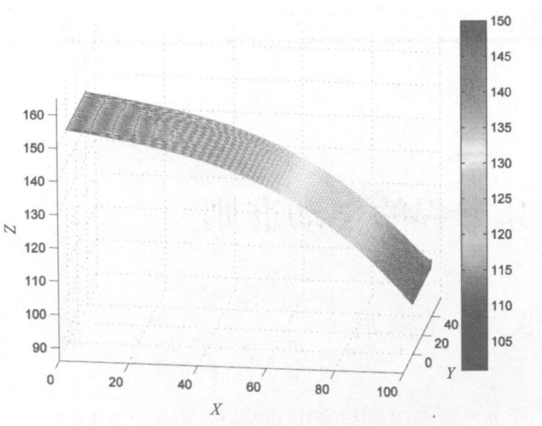

图 9 t= 40 h时网格及水头分布(3D)

Fig. 9 Mesh and water head at t= 40 h(3D)

4 结论

从算例可以看到,在初时时刻(t= 0 h),水头分布是一个平面,整个渗流场的网格是均匀的(见图 2、图 3);在 t= 5 h时,靠近井边的区域渗流较平缓,该区域的网格较希疏(见图 4、图 5);在 t= 20 h时,中间区域渗流变平缓,网格变希疏,而靠近井边的区域水头变化加极,网格变稠密(见图 6、图 7);在 t= 40 h时,井边的区域水头变化更加激烈,网格变得更加稠密,而离井远的区域网格变得希疏。在渗流的整个过程中,网格在水力梯度大的地方加密,在水力梯度小的地方稀疏.在这个例子中,水头差变大时,网格在靠近井边的地方加密,而靠近井边的水头分布往往是最引人关注的,因为像塌方等一些工程事故常常在井边区域发生.网格在移动过程中结点数不变,也就是说,在这个问题中移动网格方法在保持计算量不变的情况下提高了整体解的精度,也给出了渗流区域更详细的信息.

参考文献:

[1] Rank E, Werner H. An adaptive finite element approach for the free surface seepage problem [J]. Int J Num. Meth. Eng, 1986, 23(7): 1217-1228.

[2] Chung K Y, Kikuchi N. Adaptive methods to solve free Boundary problems of flow through porous media [J]. Int J for Num. And Anal. Meth, 1987, 11(1): 17-31.

[3] Burklcy V J, Bruch Jr J C. Adaptive error analysis in Seepage problems [J]. Int J. Num. Meth. Eng, 1991, 31(7): 1333-1356.

[4] Dvinsky A S. Adaptive Grid Generation from Harmonic Maps on Riemannian Manifolds [J]. J Comput Phys, 1991, 95: 450-476.

[5] Li R, Tang T, Zhang P W. Moving mesh methods in multiple dimensions based on harmonic maps [J]. J Comput Phys, 2001, 170: 562-588.

[6] Hamilton Richard S. Harmonic Maps of Manifolds with Boundary [M]. New York: Springer-Verlag, 1975.

[7] Schoen R, Yau S T. On univalent harmonic maps between surfaces [J]. Invent Math, 1978, 44: 265-278.

[8] Cao W M, Huang W Z, Russell R D. An error indicator monitor function for an r-adaptive finite-element method [J]. J Comput Phys, 2001, 170: 871-892.

[9] 王礼广,蔡 放,熊岳山.一种新的基于方向导数的二维自适应网格生成算法[J].国防科技大学学报, 2007, 29(6): 126-130.

[10] 薛禹群,朱学愚,地下水动力学[M].北京:地质出版社, 1979.

[11] 毛昶熙.渗流计算分析与控制[M].北京:中国水利水电出版社, 2003.