

文章编号: 1673-0062(2009)04-0092-04

基于传递矩阵法分析考虑自重的变截面高墩稳定性

刘庆潭, 赵 淳, 杨朝晖, 郭慧敏

(中南大学 土木建筑学院, 湖南 长沙 410075)

摘 要: 文章基于传递矩阵法, 通过将高墩分段, 以等截面压杆稳定计算时的场矩阵为基础, 分析了考虑自重的任意变截面高墩稳定性问题, 并导出了其总体传递矩阵及临界荷载的特征方程. 该方法充分利用了传递矩阵法适合电算的特点, 简单快捷、易于实际应用.

关键词: 传递矩阵法; 高墩; 自重; 变截面; 稳定性

中图分类号: U443.22 **文献标识码:** A

Analysis of Transfer Matrix Method by Considering the Self-stability of Variable Cross-section High-pier

LIU Qing-tan, ZHAO Chun, YANG Zhao-hui, GUO Huimin

(School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha, Hunan 410075, China)

Abstract Based on the transfer matrix method and the field matrix of uniform cross section compressive bar to stabilize by dividing a high pier in sections, the paper analyzes the stability of the arbitrary variable cross-section high pier with its self weight considered and derives its overall transfer matrix and the characteristic equation of critical load. The method making full use of the advantage of transfer matrix method that is suitable for computation can be easily applied.

Key words transfer matrix method; high pier; self weight; variable cross-section; stability

在桥梁设计过程中, 很多桥梁都须跨越高山深谷, 因此许多桥墩也相应要设计成高墩的形式^[1]. 对于这些高墩, 高强混凝土已经能满足其截面的强度要求, 然而由于构件长细比较大, 很容易发生失稳破坏, 从而使控制截面尺寸的关键因素成了桥墩的稳定性^[2]. 因此, 工程实际中也多注意到了这个问题, 设计中常采用变截面杆件. 但是, 在设计时多数情况下没有考虑墩身自重, 或采

用了比较繁琐的理论和手算方法来考虑自重, 本文针对这个问题, 利用传递矩阵法提出了一种适合电算的分析方法.

1 计算模型

文章以桥梁施工和使用过程中常用的力学模型(即桥墩一端固定一端自由的模型)进行分析, 并且不考虑风、水流以及基础变位等不利因素的

收稿日期: 2009-06-15

作者简介: 刘庆潭(1947-), 男, 湖南衡阳人, 中南大学土木建筑学院教授, 博导. 主要研究方向: 结构工程.

影响. 设桥墩高为 l , 墩上分别作用一竖向轴心力 F_{σ} 和沿轴向分布的墩身自重力 $q(x)$, 详见图 1.

二者均为已知.

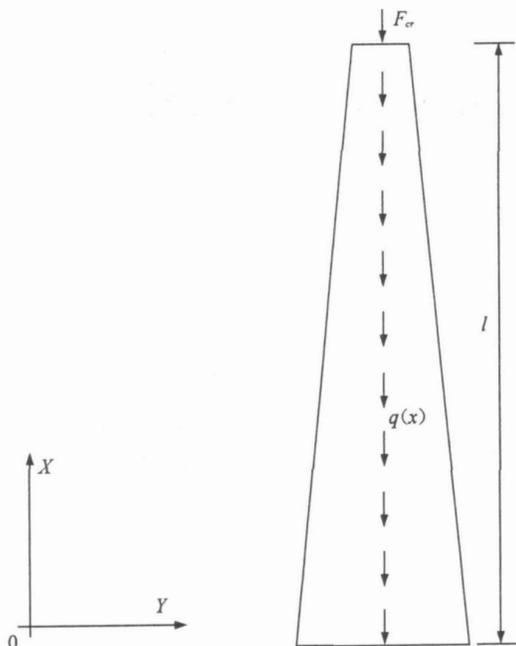


图 1 考虑自重的任意变截面高墩实际受力情况
Fig. 1 The actual stress conditions of the high pier with arbitrary variable cross - section considering its self - weight

对于不考虑自重的等截面压杆稳定计算, 其初始状态量 S_0 与末端状态量 S 之间存在如下关系^[3]: $S = US_0$

其中场矩阵 $U = \begin{bmatrix} 1 & e_2 & -e_3/EI & -e_4/EI \\ 0 & e_1 & -e_2/EI & -e_3/EI \\ 0 & EIe_0 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (1)

式 (1) 中,

$e_0 = \alpha \sin \alpha x, e_1 = \cos \alpha x, e_2 = \sin \alpha x / \alpha$
 $e_3 = (1 - \cos \alpha x) / \alpha^2, e_4 = (\alpha x - \sin \alpha x) / \alpha^3$
 以上各式中, $\alpha = \sqrt{\frac{F_N}{EI}}$ (2)

对于考虑自重的任意变截面高墩稳定性, 可将高墩按高度等分成 n 段, 每段长为 $x = \frac{l}{n}$, 再将各段自重按集中力考虑作用于分段面处, 当高墩被分为足够多的段数时, 各子段就可按等截面处理, 如图 2 所示.

墩体第 i 段平均自重线密度用 q_i 表示, 第 i 段平均截面惯性矩用 I_i 表示, 对于一定的墩体来说,

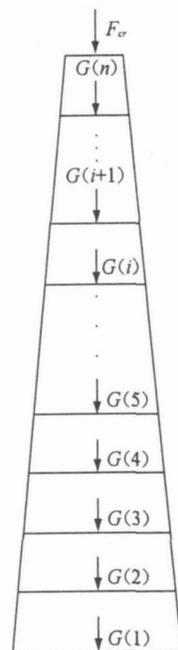


图 2 考虑自重的任意变截面高墩在本文模型中的受力情况
Fig. 2 The stress conditions of the high pier with arbitrary variable cross - section considering its self - weight in the model discussed

墩体第 i 段自重 $G(i) = q_i \cdot \frac{l}{n}$ (3)

第 i 段承受的轴力

$F_{N(i)} = \begin{cases} \sum_{k=i+1}^n G(k) + F_{\sigma}, & i \in (1, n-1) \\ F_{\sigma}, & i = n \end{cases}$ (4)

将式 (3) 代入式 (4) 得 $F_{N(i)}$, 将式 (4) 代入式 (2) 得, 再将 $\alpha, I_i, E, x = \frac{l}{n}$ 代入式 (1) 可得第

i 段的场矩阵为:

$U_i = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \alpha_i x}{\alpha_i} & -\frac{1 - \cos \alpha_i x}{\alpha_i^2 EI_i} & -\frac{\alpha_i x - \sin \alpha_i x}{\alpha_i^3 EI_i} \\ 0 & \cos \alpha_i x & -\frac{\sin \alpha_i x}{\alpha_i EI_i} & -\frac{1 - \cos \alpha_i x}{\alpha_i^2 EI_i} \\ 0 & EI_i \alpha_i \sin \alpha_i x & \cos \alpha_i x & \frac{\sin \alpha_i x}{\alpha_i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5)

其中, $\alpha_i = \sqrt{\frac{F_{N(i)}}{EI_i}}$.

于是得总体传递矩阵

$U = U_n U_{n-1} U_{n-2} \dots U_2 U_1$ (6)

注意到 $S_n = U_n U_{n-1} U_{n-2} \dots U_2 U_1 S_0$ 在初始状态矢量 S_0 中, 有两个未知状态量: $S_{0n} = M_0, S_{0n} = F_{Q0}$; 在末端状态矢量 S_n 中, 有两个为零的量: $S_{nk} = F_Q, S_{nj} = M$, 则特征方程^[3]为:

$$\therefore U_{F_Q M} U_{M F_Q} - U_{M M} U_{F_Q F_Q} = 0 \quad (7)$$

其中, $U_{F_Q M} U_{M F_Q} U_{M M} U_{F_Q F_Q}$ 是总体传递矩阵

$$U = \begin{bmatrix} U_{vv} & U_{v0} & U_{M} & U_{vF_Q} \\ U_{0v} & U_{00} & U_{0M} & U_{0F_Q} \\ U_{Mv} & U_{M0} & U_{MM} & U_{MF_Q} \\ U_{F_Q v} & U_{F_Q 0} & U_{F_Q M} & U_{F_Q F_Q} \end{bmatrix} \text{ 中的元素.}$$

由于墩体各截面特性、弹性模量和自重均为已知, 故特征方程中仅包含 F_{cr} 一个未知量, 解特征方程 (7) 即得临界荷载 F_{cr} .

2 算例

一铁路桥墩, 墩高 24 m, 墩为圆端形截面, 其墩底尺寸参考图 3 具体为: $B_2 = 350 \text{ cm}, d_2 = 350 \text{ cm}$, 圆端直径变化率为 $1:m = 1:60$, 墩身混凝土为 C20, 考虑变截面及其自重的影响分析其稳定性.

对于圆端形截面, 其圆端直径变化率为 $1:m$, 矩形边长变化率为 $1:m_B$, 为了简化计算, 假设: $m_B B_2 = m d_2, k = -2/(n d_2)$. 则对墩体第 i 段有:

$$I_i = I_0 \left(1 + k \frac{i-0.5}{n} l\right)^4, I_0 = \frac{B_2 d_2^3}{12} + \frac{\pi d_2^3}{64}$$

$$q_i = q_0 \left(1 + k \frac{i-0.5}{n} l\right)^2, q_0 = \left(B_2 d_2 + \frac{\pi d_2^2}{4}\right) r$$

式中, I_0, q_0 分别为墩身底面惯性矩和自重线密度, r 为自重集度 (kN/m^3).

墩身混凝土为 C20, 故 $E = 2.55 \times 10^7 \text{ kN/m}^2, r = 23 \text{ kN/m}^3, k = -2/(n d_2) = -2/(60 \times 3.5) = -9.5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}, I_0 = 19.87 \text{ m}^4, q_0 = 502.92 \text{ kN/m}^3$.

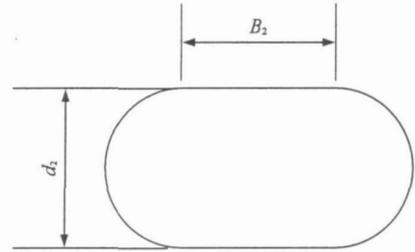


图 3 圆端形截面墩底

Fig 3 Cross-section of the pier

在分段数 n 确定的情况下, I_k, q_i 可由以上数据计算得到, 将以上数据及 I_k, q_i 代入计算模型中, 得到计算结果如表 1

表 1 传递矩阵法与功能原理计算结果对比

Table 1 Comparison of the results calculated from transfer matrix method and work-energy theorem

分段数 n	传递矩阵法计算 F_{cr}/kN	用功能原理计算的 $F_{cr}^{(4)}/\text{kN}$	相对误差
1	1.3358×10^6		16.08%
2	1.5192×10^6		4.56%
3	1.5550×10^6		2.31%
4	1.5671×10^6		1.55%
5	1.5727×10^6		1.20%
6	1.5756×10^6	1.5918×10^6	1.02%
7	1.5774×10^6		0.90%
8	1.5785×10^6		0.84%
9	1.5793×10^6		0.79%
10	1.5798×10^6		0.75%
11	1.5803×10^6		0.72%

从表 1 可以看出, 当所分段数 n 逐渐增大时, 用传递矩阵法计算的结果收敛于 1.58×10^6 附近, 当分段数为 7 段时, 计算结果与用功能原理瑞利-里兹法计算出来的结果相比, 误差已在 1% 以内, 符合精度要求. 而且随着 n 取值在一定范围内增大, 二者误差还在减小. 因此, 本文提出的模型是可靠的.

3 结语

用传递矩阵法讨论了考虑自重的变截面高墩稳定性问题, 导出了临界荷载的特征方程, 并通过实例与功能原理瑞利-里兹法的计算结果进行了对比, 证实了本文公式的正确性. 由于传递矩阵法

(下转第 101 页)

- Composite Beams[J]. ACI Journal Pro, 1955, 51(9): 24-30
- [2] 黄赛超, 陈振富, 周旺华. 混凝土叠合梁跨中截面的内力转移性能 [J]. 中南大学学报, 1996, 27(4): 405-409
- [3] 薛伟辰, 杨云俊. 混凝土叠合梁受力性能与设计方法研究进展 [J]. 混凝土与水泥制品, 2008(1): 44-48
- [4] 王秀格, 乔 兰, 尚自端. 预应力叠合梁受弯性能的试验研究 [J]. 辽宁工程技术大学学报 (自然科学版) 混凝土与水泥制品, 2008, 27(1): 71-74
- [5] 石建军, 孙 冰, 杨晓锋, 等. 新型组合板的实验研究 [J]. 南华大学学报 (自然科学版), 2004, 9(3): 24-26
- [6] 中华人民共和国建设部. GB 50010-2002 混凝土结构设计规范. 北京: 中国建筑工业出版社. 2002
- [7] 庄 茁. ABAQUS/Standard 有限元软件入门指南 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998
- [8] 庄 茁. ABAQUS/Explicit 有限元软件入门指南 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998
- [9] 孙 冰, 丁德馨, 曾 晟, 等. 钢筋混凝土叠合结构二次受力过程数值分析 [J]. 华中科技大学学报 (城市科学版), 2008, 25(4): 260-263

(上接第 94 页)

适用于一维链式构件的计算, 其计算过程都是矩阵的依次乘法^[4-5], 特别适合电算, 因此相对于其它方法更加方便, 适合在实际工程中进行推广.

参考文献:

- [1] 张 伟, 付大喜, 何海英. 高墩稳定性计算 [J]. 公路交通技术, 2006(3): 55-57
- [2] 朱慈勉, 张伟平. 结构力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009
- [3] 刘庆潭. 材料力学教程 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2006
- [4] 朱晓玲, 刘庆潭, 刘东海. 考虑自重条件下变截面高墩的弹性稳定性 [J]. 南华大学学报 (自然科学版), 2007, 21(4): 97-99
- [5] 刘庆潭, 倪国荣. 结构分析中的传递矩阵法 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1997.