文章编号: 1673- 0062(2009) 04- 0044- 05

鱼鼓型网格线性有限元方法及收敛性分析

罗迪凡[1], 张 敏[1], 谭 林[1], 赵建斌[2]

(1. 南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001; 2. 宾洲学院 计算机科学学院, 山东 宾洲 256603)

摘 要: 通过用几何分解法对二维平面上的 Possion方程边值问题进行研究. 在二维平面上对有限元空间进行鱼股型剖分, 这种剖分具有良好的剖分过渡性, 且单元之间过渡相对平稳. 由网格剖分的自适应性保证了计算解的精确可靠. 然后, 利用巧妙的证明及推理, 避开烦琐的计算, 从而得出具有较好逼近性的分析结果.

关键词: 剖分结点; 鱼鼓型; 插值结点; 插值基函数; 能量内积

中图分类号: O241. 82 文献标识码: A

The Linear Finite Element Method and Convergement Analysis on Fish's Drum Grids

LUO Di-fan[1], ZHANG Min[1], TAN Lin[1], ZHAO Jian-bin[2]

(1. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang Hunan 421001, China;
2. Department of Computer Science and Technology, Binzhou University, Bingzhou, Shandong 256603, China)

Abstract: The numerical calculation for the boundary value problem of Possion equation is researched on the two- dimensional domain, using geometric decomposition method in this paper. Here fish's drum type meshes are subdivided, which has good subdivision transitionalty. The transition between the units is relatively steady. It is reliable and accurate that the adaptive of net subdivision has guaranteed the solution of calculation. Then, by ingenious identification and reasoning, the analysis results with good approximation are attained, avoiding convoluted calculation.

Key words: subdivision points; fish's drum grids; inserting value points; base function of inserting value; inner product in energy

有限元方法是解微分方程问题[1-2]的一类数值解法. 基本思想就是把一个连续体人为的分割成有限个单元, 即把一个结构看成由若干通过结点项链的单元组成的整体, 先进行单元分析, 然后再把这些单元组合起来代表原来的结构. 它的基础分两个方面: 一个是变分原理, 一个是剖分原理. 从第一个方面看, 它是传统的能量法即李兹 - 伽辽金方法的一种变形. 从第二个方面看则它是差分方法即网格法的一种变形. 有限元网格生成就是将工作环境下的物体离散成简单单元的过

收稿日期: 2009- 09- 08
作者简介: 罗迪凡 (1973-), 男, 湖南湘潭人, 南华大学数理学院讲师, 硕士. 主要研究方向: 偏微分方程数值解.

程. 现有有限元网格剖分方法有拓扑分解法、结点连元法、网格模板法、映射法和几何分解法[3]. 常见的剖分网格有 Regular网格, Criss-Cross网格, Union Jack 网格, Chevron 网格[4-7]. 本文在二维平面上对有限元进行简单的剖分. 将平面剖分为鱼鼓型, 再对其进行分析研究.

1　二维平面上鱼鼓型线性元的计算

设 π_n 为 n次多项式函数全体构成的集合. 对应的三角形剖分如图 1.

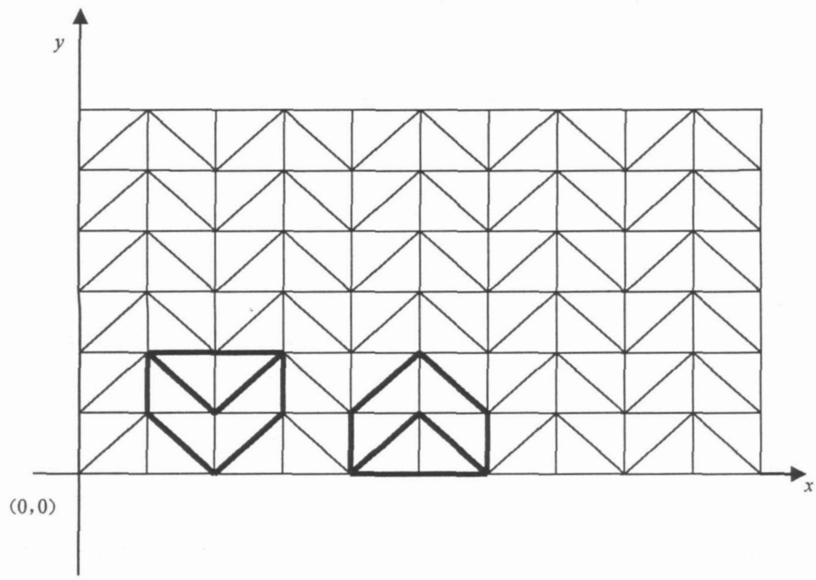

图 1　鱼鼓型网络剖分示意图

Fig. 1　Subdivision diagram of fish' s drum grids

剖分节点 (i, j), 插值节点 (i, j), $i, j\in Z$,

$V = \{u : u|_e \in \pi_1, \forall e\in T 且 u\in C(\mathrm{R}^2)\}$,

$T = \{e_{ij} : i, j\in Z\}$.

记 $C(\mathrm{R}^2)$表示在 R^2上连续函数的集合, 其中 T为所有剖分单元全体构成的集合, $Supp f$为在某个有界区间外边为零的一个连续函数 f的支撑, 即在区间外边恒等于零的最小开集. 由图 1可知, 有两种类型的插值基函数. 下面分两种情况进行详细讨论:

第一种情况, 如图 2所示.

$\varphi_{00}(x, y)$满足

① $\varphi_{00}(x, y)\in V$;

② $\varphi_{00}(i, j) = \delta_{i0}\delta_{j0}$, $\forall (i, j)\in Z^2$.

则 $Supp\,\varphi_{00} = (-1, 1)\times(0, 1)\cup\{(x, y)\mid -1 < y \leqslant 0, -1-y < x \leqslant 1+y\}$.

且有 $$\varphi_{00} = \begin{cases} 1-x, & e_0, \\ 1-y, & e_1\cup e_2, \\ 1+x, & e_3, \\ 1+x+y, & e_4, \\ 1-x-y, & e_5, \\ 0, & 其它. \end{cases}$$

第二种情况, 如图 3所示.

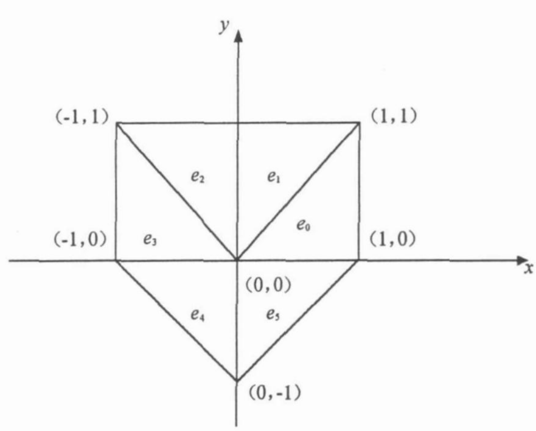

图 2　剖分单元示意图

Fig. 2　Diagram of subdivision units

$\varphi_{10}(x, y)$满足

③ $\varphi_{10}\in V$;

④ $\varphi_{10}(i, j) = \delta_{i1}\delta_{j0}$, $\forall (i, j)\in Z^2$. 其中 δ_{ij}为克罗内克函数.

则 $Supp\,\varphi_{10} = (0, 2)\times(-1, 0)\cup\{(x, y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant 2-y\}$.

且有 $\varphi_{10}=\begin{cases} x-y, & e_0,\\ x, & e_1,\\ 1+y, & e_2\cup e_3,\\ 2-x, & e_4,\\ 2-x-y, & e_5,\\ 0, & 其它. \end{cases}$

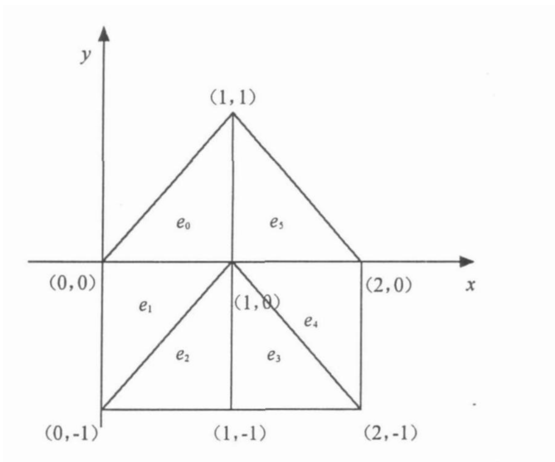

图 3　剖分单元示意图

Fig 3　Diagram of subdivision units

关于结点基函数, 我们有

$$\varphi_{k,l}(x,y)=\begin{cases}\varphi_{00}(x-k,y-l) & k为偶数;\\ \varphi_{10}(x-k+1,y-l) & k为奇数;\end{cases}$$

其中 $\varphi_{k,l}$ 满足下列条件:

① $\varphi_{k,l}(x,y)\in V$;

② $\varphi_{k,l}(i,j)=\delta_{ik}\delta_{jl}, \forall(i,j,k,l)\in Z^2$.

规定剖分结点与插值结点相同, 且插值结点类型为两类.

$$\varphi_{i,j}(x,y)=\begin{cases}\varphi_{00}(x-i,y-j) & i为偶数;\\ \varphi_{10}(x-i+1,y-j) & i为奇数;\end{cases}$$

进一步, 定义区域 Ω上的能量内积为

$$a_\Omega(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

特别地

$a(u,v)=\int_{R^2}\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 同时, 还定义区域 Ω上的 L^2 内积为

$$(u,v)_\Omega=\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

特别地

$$(u,v)=\int_{R^2}uv\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 i为偶数时, 有

在 e_0 上 $\int_0^1\int_0^x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\big|_0^1=\frac{1}{2}$.

在 $e_1\cup e_2$ 上, $\int_0^1\int_{-y}^{y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1(2-2y)\,\mathrm{d}y=2-y^2\big|_0^1=1$.

在 e_3 上, $\int_{-1}^0\int_0^x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^0-x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}x^2\big|_{-1}^0=\frac{1}{2}$.

在 e_4上, $\int_{-1}^0\int_{-1}^{-x}2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^0 2(1+x)\,\mathrm{d}x=2+x^2\big|_{-1}^0=1$.

在 e_5 上, $\int_0^1\int_{-1+x}^0 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2(1-x)\,\mathrm{d}x=2-x^2\big|_0^1=1$.

所以, $a(\varphi_{00},\varphi_{00})=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1+1=4$

当 i为奇数时, 同样可求得

$$a(\varphi_{10},\varphi_{10})=1+\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+1=4$$

类似地, 我们可计算 $a(\varphi_{00},\varphi_{10})$, $a(\varphi_{-10},\varphi_{00})$ 以及其它能量内积, 从而我们有

$$a(\varphi_{k,l},\varphi_{ij})=\begin{cases}4, & (i,j)=(k,l).\\ -1, & (i,j)=(k+1,l),(k-1,l),\\ & \quad (k,l+1),(k,l-1),\\ 0, & 其它.\end{cases}\tag{1}$$

$\forall u\in C(\mathrm{R}^2)$, u在 V上的插值函数 u_I定义为

$u_I=\sum_{(i,j)\in Z^2}u_{ij}\varphi_{ij}\in V$, 其中 $u_{ij}=u(i,j)$.

当 i为偶数时, 有 $(x^ky^l,\varphi_{00})_{e_0}=\int_0^1 x^k(l-x)\,\mathrm{d}x\int_0^x y^l\,\mathrm{d}y=\frac{1}{(l+1)(k+l+3)(k+l+2)}$,

同理可求得 $(x^ky^l,\varphi_{00})_{e_1}=\int_0^1 y^l(1-y)\,\mathrm{d}y\int_0^y x^k\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(l+1)(k+l+3)(k+l+2)}$,

$(x^ky^l,\varphi_{00})_{e_2}=\int_0^1 y^l(1-y)\,\mathrm{d}y\int_{-y}^0 x^k\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+l+2)(k+l+3)}$,

$(x^ky^l,\varphi_{00})_{e_3}=\int_{-1}^0 x^k(1+x)\,\mathrm{d}y\int_0^{-x}y^l\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^k}{(k+1)(k+l+2)(k+l+3)}$,

$(x^ky^l,\varphi_{00})_{e_4}=\int(-1)^{k+l}\lambda_1^k\lambda_2^l\lambda_3=\frac{(-1)^{k+1}k!\,l!}{(l+k+3)!}$,

$(x^ky^l,\varphi_{00})_{e_5}=\int(-1)^l\lambda_1^k\lambda_2^l\lambda_3=$

$\frac{(-1)^l k!\, l!}{(k+l+3)!}$,

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 为三角形单元对应的局部面积坐标. 于是

$$\int_\Omega x^k y^l \varphi_{00} = (x^k y^l, \varphi_{00}) = [1+(-1)^k] \times \frac{1}{(k+l)(l+1)(k+l+3)} + [1+(-1)^k](-1)^l \times \frac{k!\, l!}{(k+l+3)}.$$

从而 $\frac{1}{k!\, l!}(x^k y^l, \varphi_{00}) = [1+(-1)^k] \times [\frac{1}{(k+l)!\,(l+1)!\,(k+l+3)} + (-1)^k \times \frac{1}{(k+l+3)!}]$.

当 $u \in \pi_5, f = -\Delta u \in \pi_3$, 由 Green公式及二维 Taylor展式, 有

$$a(u, \varphi_{00}) = (f, \varphi_{00}) = \sum_{0 \leqslant k+l \leqslant 3} \frac{f_{00}^{k\,l}}{k!\, l!}(x^k y^l, \varphi_{00}).$$

通过前面计算的结果, 可知

$$a(u, \varphi_{00}) = f_{00} + \frac{1}{6}f_{00}^{0\,1} + \frac{1}{12}f_{00}^{0\,2} + \frac{1}{12}f_{00}^{2\,0} + \frac{1}{40}f_{00}^{2\,1} + \frac{1}{90}f_{00}^{0\,3}.$$

类似的有

$$a(u, \varphi_{10}) = f_{10} - \frac{1}{6}f_{00}^{0\,1} + \frac{1}{12}f_{00}^{0\,2} + \frac{1}{12}f_{00}^{2\,0} - \frac{1}{40}f_{00}^{2\,1} - \frac{1}{90}f_{00}^{0\,3}.$$

$\forall u \in \pi_5$, 结合式 (1) 我们可以计算出 $a(u_I, \varphi_{i\,j})$ 在 (i, j) 点的渐近展开式如下:

$$\begin{aligned} a(u_I, \varphi_{ij}) &= 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} \\ &= -\Delta u_{ij} - \frac{1}{12}(u_{i,j}^{4\,0} + u_{ij}^{0\,4}) \\ &= f_{ij} + \frac{1}{12}\Delta f_{i,j} + \frac{1}{6}u_{ij}^{2\,2}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u \in \pi_2,\ a(Eu, \varphi_{ij})$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{6}f_{ij}^{0\,1} - \frac{1}{6}u_{ij}^{2\,2} + \frac{1}{40}f_{ij}^{2\,1} + \frac{1}{90}f_{ij}^{0\,3}, & i\text{为偶数}, \\ -\frac{1}{6}f_{ij}^{0\,1} - \frac{1}{6}u_{ij}^{2\,2} + \frac{1}{40}f_{ij}^{2\,3} - \frac{1}{90}f_{ij}^{0\,3}, & i\text{为奇数}. \end{cases} \tag{2}$$

此处, $Eu = u - u_I$. 由式 (2) 知, 当 $u \in \pi_2$ 时, $a(Eu, \varphi_{ij}) \equiv 0$ 当 $u \in \pi_3$ 时, $f^{0\,1} = (-\Delta u)^{0\,1}$ 恒为一常数. 所以

$$a(Eu, \varphi_{00}) + a(Eu, \varphi_{10}) = \frac{1}{6}f_{00}^{0\,1} + (-\frac{1}{6}f_{10}^{0\,1}) \equiv 0, \forall u \in \pi_3. \tag{3}$$

2 有限元空间中鱼鼓型线性元的计算

考虑如下 Possion(泊松方程)

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 Δ是 Laplace算符 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

我们定义有限元空间 V_h 如下:

$V_h = span\{\phi_{ij} : (i, j) \in T\}$, 其中 $T = \{e_{ij} : (i, j) \in Z\}$. 显然 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$.

那么方程 (4) 的弱解 u 定义为: 求 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 均有

$$a_\Omega(u, v) = (f, v) \tag{5}$$

其中

$$a_\Omega(u, v) = \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,dx\,dy,$$

$$(f, v) = \iint_\Omega f v \,dx\,dy.$$

此时方程 (4) 在 V_h 中的有限元解 u_h 为: 求 $u_h \in V_h$, 使得 $\forall v \in V_h$, 均有

$$a_\Omega(u_h, v) = (f, v)$$

引进函数空间 $V_h = span\{\varphi_{ij} : i, j = 1(1)N-1\}$. 其中

$$\varphi_{ij}(x, y) = \begin{cases} \varphi_{00}(\frac{x-ih}{h}, \frac{y-ih}{h}), & i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ \varphi_{10}(\frac{x-ih+h}{h}, \frac{y-ih}{h}), & i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

则容易验证

① $\varphi_{ij} \in C_0^0(\Omega)$, ② $\varphi_{ij}(i', j') = \delta_{i'i}\delta_{j'j}$.

为了得到高精度的渐近展式, 我们构造依结点类型不同而分段光滑的结点函数 $g_k \in V_h$, 这里 g_k 是被逼近函数 u 的一个线性算子, 并且具有如下结构特点:

$$(g_k)_{ij} = \begin{cases} 0, & i \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2), \\ \sum_{\alpha+\beta=k} \frac{b(\alpha, \beta)}{\alpha!\,\beta!} u_{ij}^{\alpha\,\beta}, & i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

$$g_k = \sum_k (g_k)_{ij}\varphi_{ij}.$$

整体光滑函数 w_k 满足 $-\Delta w_k = \sum_{\alpha+\beta=k} \frac{b(\alpha, \beta)}{\alpha!\,\beta!} u^{\alpha\,\beta}$.

记 $I_h u = \sum_{i\,j=1}^{N} u(ih, jh)\varphi_{ij}$, $g_k^h = \sum_{i\,j=1}^{N-1}(g_k)_{ij}\varphi_{ij}$, $E_h u = u - I_h u$, $E_h^1 u = E_h u - h^3 g_3^h$, $E_h^2 u = E_h^1 u - h^2 w_4$, $E_h^3 u = E_h^2 u - h^5 g_5^h$, $E_h^4 u = E_h^3 u - h^3 w_5$.

由上节的推导知 $\forall u \in C^6(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 有 $a(E_h^4 u, \varphi_{ij}) = O(h^4)$.

3 收敛性分析的结论

定理 1 若 $f \in L^2(\Omega)$, 则 Possion 方程 $\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y) \in \Omega \\ u = 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$ 的弱解 $u \in H_0^1(\Omega)$ 存在且唯一, 并有如下误差估计

$$\| u - u_h \|_s \leqslant Ch^{1-s} \| u - u_I \|_1 (s = 0, 1).$$

证明: $s = 1$时, 由双线性泛函 $a(u, v)$ 的连续性、强制性和正交性, 对 $\forall v_h \in V_h$, 有 $\| u - u_h \|_1^2 \leqslant Ca(u - u_h, u - u_h) = Ca(u - u_h, u - v_h) \leqslant C \| u - u_h \|_1 \| u - v_h \|_1$, 于是, 由 Cea引理, 得 $\| u - u_h \|_1 \leqslant C \inf \| u - v_h \|_1 \leqslant C \| u - u_I \|_1$.

$s = 0$时, 构造辅助函数 w, 满足 $-\Delta w = u - u_h$, $w |_{\partial\Omega} = 0$, 则有正则性估计[8]: $\| w \|_2 \leqslant C \| u - u_h \|_0$. 于是, 对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 有 $a(w, v) = (u - u_h, v)$. 特别地, 取 $v = u - u_h$, 则有 $\| u - u_h \|_0^2 = a(w, u - u_h) = a(w - w_I, u - u_h) \leqslant C \| w - w_I \|_1 \| u - u_h \|_1 \leqslant Ch \| w \|_2 \| u - u_I \|_1 \leqslant Ch \| u - u_h \|_0 \| u - u_I \|_1$, 从而得到 $\| u - u_h \|_0 \leqslant Ch \| u - u_I \|_1$. 证毕.

参考文献:

[1] 沈建国, 陈志杨, 张 引, 等. 面向有限元分析的三角网格迭代优化[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009(21): 1315-1321.

[2] 张晋红, 吴风林. 有限元法及其应用现状[J]. 建材技术与应用, 2007(4): 9-10.

[3] 陈传淼, 黄云清. 有限元高精度理论[M]. 长沙: 湖南科技出版社, 1995.

[4] 喻海元. 基于几类基本三角形网格下的线性元与二次元的渐近展式和外推研究[D]. 湘潭: 湘潭大学, 2006.

[5] 傅凯新, 黄云清, 舒 适. 数值计算方法[M]. 长沙: 湖南科学出版社, 2002.

[6] 张述良, 译. 有限元与近似法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1997.

[7] Zhang Zhimin, Naga Ahmed. Validation of the a posteriori error estimator besded on polynominal presererving recovery for linear elements[J]. Intenaternational Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004(61): 1860-1893.

[8] Zhang Zhimin. Polynominal preserving gradient recovery and a posteriori estimate for bilinear slement on irregular quadrilaterals[J]. Intematernational Journal of Numerical Analysis and Modeling, 2004(1): 1-24.

(上接第 40页)

[2] Texas Instruments, Inc. CC2520 datasheet[EB/OL]. http//: www.ti.com/CC2520.

[3] 黄智伟. 全国大学生电子设计竞赛电路设计[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006.

[4] 何 娜, 黄智伟. 基于 CC2520的 ZigBee/IEEE802.15.4的收发器电路[J]. 工业控制计算机, 2009, 22(3): 96-97.

[5] 黄智伟, 何 娜. 基于 MRF24J40的 IEEE802.15.4无线收发电路设计[J]. 现代电子技术, 2008, 21(11): 36-38.

[6] 黄智伟. 单片无线收发集成电路原理与应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2005.