

文章编号: 1673 - 0062 (2009) 04 - 0041 - 03

关于 $W(n)$ 条件的一个注记

黄宠辉, 许友军, 蔡秋娥

(南华大学 数理学院, 湖南 衡阳 421001)

摘 要: 用挠自由模类的性质刻画了 Noether 环上的 $W(n)$ 条件, 并研究了其对称性; 给出了满足 $W(n)$ 条件和具有有限自内射维数的等价的一些条件; 最后通过环的右极小内射分解给出了全体左模范畴的内射上生成子.

关键词: 挠自由模; $W(n)$ 条件; Noether 环; 上生成子

中图分类号: O153.3 **文献标识码:** A

A Note on $W(n)$ Condition

HUANG Chong-hui, XU You-jun, CAI Qiu-er

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper, using properties of n -torsionfree modules, first gives an equivalent characterization of Noether rings satisfying $W(n)$ condition. It discussed the left-right symmetric of rings satisfying $W(n)$ condition, then gives a sufficient condition that rings satisfying $W(n)$ condition coincide with rings with finite selfinjective dimension n . Using properties of the minimal injective resolution, it gives an injective cogenerator of left module category.

Key words: n -torsionfree modules; $W(n)$ condition; Noether rings; cogenerator

自内射维数有限的 Noether 环是交换代数和同调代数中一类重要的研究对象. 许多著名的同调猜想都和它有非常密切的联系, 特别是有限性维数猜想^[1] (全体具有有限投射维数的有限生成模的维数上确界是有限的) 和强 Nakayama 猜想^[2] (设 $M \in \text{mod } R$, 如果 $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \text{Ex}_R^i(M, R) = 0$, 那么 $M = 0$). 在文献 [1] 和文献 [2] 中, Jan 和 Fuller 分别对这类环作了很好的推广, 并且证明了在这些推广下, 有限性维数猜想和强 Nakayama 猜想是

成立的. 本文将主要考察 Noether 环的极小自内射分解, 给出自内射维数有限的 Noether 环的另一种推广, 并且将讨论它与自内射维数有限的 Noether 环等价的条件.

本文中, 我们总假设 R 是左-右 Noether 环, $\text{mod } R$ (或 $\text{mod } R^{\text{op}}$) 表示由有限生成左 R 模 (或右 R 模) 组成的模范畴. 除非特别说明, 本文所考虑的模均是有限生成的. 对于一个左 (或右) R 模 M , 我们用 M^* 表示 $\text{Hom}(-, R)$; 用 $\text{lid}(M)$ 、 lfid

收稿日期: 2009 - 03 - 11

基金项目: 江苏省自然科学基金资助项目 (BK2007517)

作者简介: 黄宠辉 (1978 -), 男, 湖南资兴人, 南华大学数理学院讲师, 硕士. 主要研究方向: 代数学.

(M) (或 $\text{rid}(M)$ 、 $\text{rfd}(M)$) 分别表示 M 的左 (或右) 内射维数、平坦维数. 设 $\sigma_M: M \rightarrow M^*$ 的典范同态, 如果 σ_M 是单态射 (或同构), M 就称作是无挠的 (或自反的). 易知所有的投射模都是自反的; 我们用 $\Omega^n(A)$ 来表示一个模 M 的第 n 个合冲模, 用 $\text{Tr}(M)$ 来表示模 M 的 Auslander 转置^[3]. 我们称模左 (或右) R 模 M 是一个左 (或右) W_n 模, 如果对任意 $1 \leq i \leq n$, 都有 $\text{Ext}_R^i(M, R) = 0$; 如果对任意正整数 n , M 都是一个左 (或右) W_n 模, 则我们称 M 是一个左 (或右) W_∞ 模. 我们称 M 是一个左 (或右) n -挠自由模^[3], 如果对任意 $1 \leq i \leq n$, 都有 $\text{Ext}_R^i(\text{Tr}(M), R) = 0$; 如果对任意正整数 n , M 都是一个左 (或右) n -挠自由模, 则我们称 M 是一个左 (或右) ∞ -挠自由模. 不难知道, M 是左 (或右) 1-挠自由模 (左 (或右) 2-挠自由模) 当且仅当 M 是无挠模 (或自反模).

首先, 我们用如下的引理 1 刻画了 n -合冲模类和 n -挠自由模类之间的关系.

引理 1 对任意正整数 n , $N \in \text{mod } R$ 是左 n -挠自由模当且仅当 N 是某个左 W_n 的 M 的第 n 个合冲模.

证明: 当 $n=1$ 时见文献 [4] 中的推论 1.3

下面假设 $n \geq 2$. 假设有 $\text{mod } R$ 中的正合列 $0 \rightarrow N \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 $M = \text{Coker } f$ 是一个左 W_n 模. 取 N 的一个投射表现 $P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow N \rightarrow 0$, 则我们可以得到 $\text{mod } R^{\text{op}}$ 中的正合列 $0 \rightarrow M^* \rightarrow P_0^* \rightarrow \cdots \rightarrow P_n^* \rightarrow P_{n+1}^* \rightarrow \text{Tr}(N) \rightarrow 0$. 由 $P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f} P_0$ 的正合性, 我们得到 $\text{Tr}(N)$ 是一个右 W_n 模. 从而 N 是一个左 n -挠自由模.

反之, 假设 N 是一个左 n -挠自由模. 取 N 的一个投射分解 $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$, 则我们可以得到正合列 $0 \rightarrow N^* \rightarrow P_0^* \rightarrow P_1^* \rightarrow \text{Tr}(N) \rightarrow 0$. 取 $\text{Tr}(N)$ 在 $\text{mod } R^{\text{op}}$ 中的一个投射分解 $Q_{n+1} \xrightarrow{f} Q_n \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow P_0^* \rightarrow P_1^* \rightarrow \text{Tr}(N) \rightarrow 0$. 由于 $\text{Tr}(N)$ 是一个右 W_n 模, 我们可以得到正合列 $0 \rightarrow \text{Tr}(N)^* \rightarrow P_1^{**} \rightarrow P_0^{**} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_n^* \rightarrow Q_{n+1}^* \rightarrow \text{Coker } f^* \rightarrow 0$. 易见 $\text{Coker } f^*$ 是一个左 W_n , 并且 N 是 $\text{Coker } f^*$ 的第 n 个合冲模.

定理 2 对任意正整数 n , 下列陈述等价:

- (1) 全体左 W_n 模是左 1-挠自由模;
- (2) 全体左 W_n 模是左 ∞ -挠自由模;
- (3) 全体左 n -挠自由模是左 ∞ -挠自由模;
- (4) 全体右 W_n 模是右 W_{n+1} 模;
- (5) 全体右 n -挠自由模是右 W_∞ 挠自由模.

证明: (2) $\Rightarrow$ (1), (3) $\Leftrightarrow$ (4) 是显而易见的.

(1) $\Rightarrow$ (4) 任取一个右 W_n 模 N , 作 N 的投射分解 $\cdots \rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow N \rightarrow 0$. 则我们可得正合列 $0 \rightarrow N^* \rightarrow P_0^* \rightarrow P_1^* \rightarrow P_2^* \rightarrow \cdots \rightarrow P_n^* \rightarrow P_{n+1}^* \rightarrow \text{Tr}(\Omega^n(N)) \rightarrow 0$. 则 $\text{Tr}(\Omega^n(N))$ 是一个左 W_n 模. 再由题设可知 $\text{Tr}(\Omega^n(N))$ 是 1-挠自由的. 从而 $\text{Ext}_R^{n+1}(N, R) = \text{Ext}_R^1(\Omega^n(N), R) = 0$.

(4) $\Rightarrow$ (2) 假设 M 是一个左 W_n 模, 则由 M 的一个投射分解 $\cdots \rightarrow Q_{n+1} \rightarrow Q_n \rightarrow \cdots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 可以推出 $0 \rightarrow M^* \rightarrow Q_0^* \rightarrow Q_1^* \rightarrow Q_2^* \rightarrow \cdots \rightarrow Q_n^* \rightarrow Q_{n+1}^* \rightarrow \text{Tr}(\Omega^n(M)) \rightarrow 0$ 是正合的. 由 (4) 可得 $\text{Tr}(\Omega^n(M))$ 是右 W_{n+1} 模, 从而是右 W_∞ 模. 这样我们有: 对任意整数 $k \geq 1$, $\text{Ext}_R^k(\text{Tr}(M), R) \cong \text{Ext}_R^{n+k}(\text{Tr}(\Omega^n(M)), R) = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (5) 任取右 n -挠自由模 L , 由定义可知 $\text{Tr}(L)$ 是一个左 W_n 模. 由 (2) 可知 $\text{Tr}(L)$ 是左 ∞ -挠自由的, 从而 L 是右 W_∞ 模.

(5) $\Rightarrow$ (4) 由引理 1 易知.

如果上面的陈述之一是成立的, 我们就称 R 满足右 $W(n)$ 条件. 类似地也可以定义左 $W(n)$ 条件. 显然, 如果 $\text{rid } R \leq n$, 则 R 一定是满足右 $W(n)$ 条件的. 同时, 也不难验证, R_R 一个具有多余像^[2]的自内射分解, 则 R 满足右 $W(n)$ 条件. 并且, 如下的注记说明, 环 R 满足右 $W(n)$ 条件未必会有有限的右自内射维数.

注: M 的一个内射分解 $0 \rightarrow \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} E_2 \cdots$ 被称为是终结闭的, 如果存在 $n \geq 1$, 使得 $\text{Im } f_n$ 有一个有限的分解 $\oplus_{j=1}^n W_j$, 并且每个 W_j 同构于某个 $\text{Im } f_{i_j}$ 的直和项, 这里 $i_j < n$. 众所周知, 每个具有有限自内射维数的环 R 都有一个终结闭的自内射分解, 但反之不然. 而文献 [2] 中的例 [8] 指出, 有这样的环 R , R_R 一个具有多余像、但是并不具有终结闭的自内射分解, 从而更不具有有限自内射维数.

当 $n=1$ 时, 我们得到如下的结果, 这也可以看成是文献 [4] 中定理 5.1 的一个更广泛的情形.

推论 3 对任意正整数 n , 下列陈述等价:

- (1) 全体左 W_1 模是左 1-挠自由模;
- (2) 全体左 W_1 模是左 ∞ -挠自由模;
- (3) 全体左 1-挠自由模是左 ∞ -挠自由模;
- (4) 全体右 W_1 模是右 ∞ 模;
- (5) 全体右 1-挠自由模是右 W_∞ 挠自由模.

因为 1-挠自由和无挠是等价的, 由推论 3 和文献 [4] 定理 5.1, 我们马上得到如下结果.

推论 4 如果 R 是一个左右 Artin 环, 则对任

意正整数 n , 下列陈述等价:

- (1) R 满足左 $W(1)$ 条件;
- (2) $1 \text{ id } R \leq 1$;
- (3) R 满足右 $W(1)$ 条件;
- (4) $r \text{ id } R \leq 1$.

由推论 3 和文献 [4] 定理 5.1, 我们知道 R 满足左 $W(1)$ 条件当且仅当 $1 \text{ id } R \leq 1$. 而当 $n \geq 2$ 时, $r \text{ id } R \leq n$, 则 R 一定是满足右 $W(n)$ 条件的, 反之不对. 那么, 很自然地, 什么时候反过来也是对的? 如下的结果部分回答了这个问题.

命题 5 设 n 是一个大于或等于 2 的正整数, 如果每个 n 合冲都是 n -挠自由的, 则 R 满足右 $W(n)$ 条件当且仅当 $r \text{ id } R \leq n$.

证明: 任取有限生成右 R 模 M , 可得 $\text{Ex}_R^{n+1}(M, R) \cong \text{Ex}_R^1(\Omega^n(M), R)$. 再由题设和引理 1, 存在右 W_n 模 N 和正合列 $0 \rightarrow \Omega^n(M) \rightarrow P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_{n-1} \rightarrow N \rightarrow 0$, 如果 R 满足右 $W(n)$ 条件, 则 N 是一个 W_{n+1} 模. 因此, $\text{Ex}_R^{n+1}(M, R) \cong \text{Ex}_R^1(\Omega^n(M), R) \cong \text{Ex}_R^{n+1}(N, R) = 0$.

设 $n, k \geq 0$, 注意到 R 满足 $g_n(k)$ 条件^[5] 当且仅当对任意 $C \in \text{mod } R^{\text{op}}$ 和 $1 \leq i \leq n$ 以及 $0 \leq m \leq i-1$ 有 $\text{Ex}_R^m(\text{Ex}_R^{i+k}(C, R), R) = 0$. 我们得到如下推论:

推论 6 假设 n 和 k 是任意正整数, 如果 R 满足右 $g_n(k)$, 则 R 满足右 $W(n)$ 条件当且仅当 $1 \text{ id } R \leq n + k - 1$.

同调中著名的 Gorenstein 对称猜想 (Noether 环的左右自内射维数是相等的) 至今受到广泛的关注. 作为自内射维数有限的一种推广, 很自然地, 如果 R 满足右 $W(n)$ 条件, 那么 R 满足左 $W(n)$ 条件么? 如下命题部分回答了这个问题.

命题 7 假设 n 和 m 是两个正整数, 如果 R 满足右 $W(n)$ 条件并且 R 满足左 $W(m)$, 则 $m = n$.

证明: 设 $m \leq n$. 任取 $\text{mod } R^{\text{op}}$ 中 W_m 模 M , 由定理 2 可得, M 是一个右 ∞ -挠自由模, 从而是 n -挠自由模. 再次运用定理 2 和 R 满足右 $W(n)$ 条件, 可得 M 是 W_∞ 模. 这样 R 满足右 $W(m)$ 条件, 所以 $m = n$.

定理 8 设 R 满足左 $W(n)$ 条件. 若对任意 $M \in \text{mod } R$, $\text{Ex}_R^i(M, R) = 0$, 其中 $0 \leq i \leq n$, 则 $M = 0$. 特别地, $\bigoplus_{i=0}^n I_i$ 还是全体 R 左模类的一个内射上生成子.

证明: 假设对任意 $0 \leq i \leq n$, $\text{Ex}_R^i(M, R) = 0$ 但是 $M \neq 0$. 由投射分解 $\cdots \rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow$

$P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ 得到正合列 $0 \rightarrow P_0^* \rightarrow P_1^* \rightarrow P_2^* \rightarrow \cdots \rightarrow P_n^* \rightarrow P_{n+1}^* \rightarrow L \rightarrow 0$, 这里 $L = \text{Coker}(P_n^* \rightarrow P_{n+1}^*)$. 由于 P_i 都是自反的, 易知 $\text{Ex}_R^{n+1}(L, R) \cong M \neq 0$, 并且 L 是一个右 W_n 模. 然而根据定理的条件, 全体右 W_n 模是右 W_∞ 模, 所以 $\text{Ex}_R^{n+1}(L, R) = 0$ 矛盾, 所以 $M = 0$.

又由文献 [6] 中的引理 1, 对任意左单模 S , $\text{Ex}_R^i(S, R) = 0$ 当且仅当 S 可以嵌入 I_i . 所以 $\bigoplus_{i=0}^n I_i$ 是全体左 R 模范畴的一个内射上生成子.

推论 9^[6] 如果 R 有有限的右自内射维数 n , 则 $\bigoplus_{i=0}^n I_i$ 是全体左模范畴的一个内射上生成子.

引理 10^[7] R 和 S 是任意环. 如果在 $(A_{R,S}, B_{R,S}, C)$ 中, A 是有限生成右 R 模, C 是内射 S 模, B 是左 S 右 R 模, 则对任意整数 $i \geq 0$ 有 $\text{Hom}_S(\text{Ex}_R^i(A, B), C) \cong \text{Tor}_i^R(A, \text{Hom}_S(B, C))$.

命题 11 如下陈述等价:

- (1) R 有有限的右自内射维数;
- (2) 存在某个正整数 n 使得 R 满足右 $W(n)$ 条件, 并且对任意 $i \geq 0$, $1 \text{ fd}(I_i) < \infty$.

证明: 只须证明 (2) 可以推出 (1). 对任意 $M \in \text{mod } R^{\text{op}}$ 和任意内射左 R 模 I 以及任意整数 $i > 0$, 由引理 10 可得, $\text{Hom}(\text{Ext}^{i+1}(M, R), I) \cong \text{Tor}_{i+1}^R(M, I)$. 如果 I 还是内射上生成子, 则 $\text{Ex}_R^{i+1}(M, R) = 0$ 当且仅当 $\text{Tor}_{i+1}^R(M, I) = 0$. 因此 $r \text{ id}(R_R) < \infty$ 当且仅当 $1 \text{ fd}(I) < \infty$. 由定理 8, $\bigoplus_{i=0}^n I_i$ 是全体左模范畴的内射上生成子; 对任意整数 $i \geq 0$, 如果 $1 \text{ fd}(I_i) < \infty$, 则 R 有有限的右自内射维数.

参考文献:

- [1] Jans J P. Some generalizations of finite projective dimension[J]. Illinois J. Math., 1961, 5: 334 - 344.
- [2] Colby R R, Fuller K R. A note on the Nakayama conjecture[J]. Tsukuba J. Math., 1990, 14: 343 - 352.
- [3] Auslander M, Bridger M. Stab module theory, Memoirs Amer[J]. Math Soc 94, Amer Math Soc, Providence, RI 1969.
- [4] Jans J P. On finitely generated modules over Noetherian rings[J]. Trans Amer Math Soc., 1963, 106 (2): 330 - 340.
- [5] Huang Z Y, Iyama O. Auslander - type conditions and cotorsion pairs[J]. J. Algebra, 2007, 318 (1), 93 - 110.
- [6] Iwanaga Y. On rings with finite self-injective dimension[J]. Comm. Alg., 1979, 7: 394 - 414.
- [7] Cartan H, Eilenberg S. Homological Algebra[M]. Princeton: Princeton University Press, 1956.