文章编号:1673 - 0062(2009)03 - 0036 - 03

一类具有快速振荡系数的线性抛物方程的近似能控性

许友军,黄宠辉,杨晓霖

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘　要:考虑一类具有快速振荡系数的线性抛物系统的近似能控性,当 $\varepsilon \to 0$ 时,具有快速振荡系数的线性抛物系统的近似控制和相应的解分别收敛于相应的均匀化问题的近似控制和相对应的解.

关键词:能控性;均匀化;线性抛物系统

中图分类号:O175.15　　**文献标识码**:A

Approximate Controllability for a Parabolic Equation with Rapidly Oscillating Coefficients

XU You-jun, HUANG Chong-hui, YANG Xiao-lin

(School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper we consider an approximate controllability problem for linear parabolic equations with rapidly oscillating coefficients. We show that, as $\varepsilon \to 0$, the approximate control and the corresponding solution converge respectively to the approximate control and to the solution of the homogenized problem.

Key words: controllability; homogenization; parabolic equation

0　引言

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^n (n \geqslant 1)$ 是一个有界开集,边界属于 C^2. 考虑下面抛物系统

$$\begin{cases} \rho(\dfrac{x}{\varepsilon}) y'_\varepsilon - \operatorname{div}(A(\dfrac{x}{\varepsilon}) \nabla y_\varepsilon) = f_\varepsilon 1_\omega & (x,t) \in Q, \\ y_\varepsilon = 0 & (x,t) \in \sum, \\ y_\varepsilon(x,0) = y_\varepsilon^0 & (x) x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $y'_\varepsilon = \dfrac{\partial y_\varepsilon}{\partial t}, y_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega), Q = \Omega \times (0,T)$, ω 是 Ω 的一个非空开集. $f_\varepsilon \in L^2(Q)$ 是一待定的控制函数, 1_ω 是 ω 的特征函数. 任意 $\varepsilon > 0, A(y) = (\alpha_{ij}(y))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ 是定义在 R^n 上的 $n \times n$ 矩阵值函数,其中 $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, A \in C^1(\bar{Y})^{n^2}$ 是 Y - 周期的. 对任意 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathrm{R}^n$,存在 $\alpha > 0$ 满足 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda_i\lambda_j \geqslant \alpha \| \lambda \|^2$. $\rho \in L^\infty(\mathrm{R}^n)$ 满足 $0 < \rho_m \leqslant$

收稿日期:2009 - 01 - 14
作者简介:许友军(1976 -),男,湖南永兴人,南华大学数理学院讲师,博士. 主要研究方向:偏微分方程、分布参数系统.

$\rho(x) \leqslant \rho_M \quad a.e \quad x \in \mathrm{R}^n$ 中 ρ 是 Y－周期函数，这里 $Y = [0,1]^n$. 根据文献[1－2]第三章知，系统(1)有一个唯一的解 y_ε 且满足 $y_\varepsilon \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

由文献[3]知，当 $\varepsilon \to 0$ 时，系统(1)收敛于

$$\begin{cases} \bar{\rho}y' - \operatorname{div}(A\nabla y) = f1_\omega & (x,t) \in Q, \\ y = 0 & (x,t) \in \sum, \\ y(x,0) = y^0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2}$$

这里平均值 $\bar{\rho} = \int_{[0,1]^n} \rho(x)\mathrm{d}x$ 和均匀化常数矩阵 A[3]. 该类问题来源于许多实际问题如热传导，合成物中的弹性或扭曲，多孔介质中的流动等，是非常有意义的，引起了许多学者的关注[3-5].

1　主要结果

定理1　假设 A,ρ 满足上述条件，序列 $\{y_\varepsilon^0\}_{\varepsilon \geqslant 0} \subset L^2(\Omega)$，$\{y_\varepsilon^1\}_{\varepsilon \geqslant 0} \subset L^2(\Omega)$ 满足

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| y_\varepsilon^1 - y^1 \|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| y_\varepsilon^0 - y^0 \|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{3}$$

$y_\varepsilon(x,t)$ 是相应于初值 y_ε^0 时系统(1)的解，则当 $\varepsilon \to 0$ 时，在 $L^2(\omega \times (0,T))$ 中，有 ψ_ε 强收敛于 ψ，在 $C([0,T];L^2(\Omega))$ 中 y_ε 强收敛于 y. 此时，极限系统的近似能控性成立，即

$$\| y^1 - y(T) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant \alpha \tag{4}$$

由条件(3)知，得

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| (y_\varepsilon^1 - v_\varepsilon(T)) - (y^1 - v(T)) \|_{L^2(\Omega)} = 0 \tag{5}$$

这里 v 是系统

$$\begin{cases} \bar{\rho}y' - \operatorname{div}(A\nabla v) = 0 & (x,t) \in Q, \\ v = 0 & (x,t) \in \sum, \\ v(x,0) = y^0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{6}$$

的解.

2　证明

由文献[3]可知，对任意固定的 ε，系统(1)的近似能控性是下面具有快速振荡系数的线性抛物系统的对偶问题的唯一连续性的直接结果.

$$\begin{cases} -\rho(\frac{x}{\varepsilon})\phi'_\varepsilon - \operatorname{div}(A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla\phi_\varepsilon) = 0 & (x,t) \in Q, \\ \phi_\varepsilon = 0 & (x,t) \in \sum, \\ \phi_\varepsilon(x,T) = \phi_\varepsilon^0(x) & x \in \Omega, \end{cases}$$

注意到 Hahn－Banach 定理并不能提供任何信息关于控制依赖初始数据和参数 ε. 因此，对任意 $\phi_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$，定义

$$J_\varepsilon(\phi_\varepsilon^0) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\phi_\varepsilon|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \alpha \|\rho(\frac{x}{\varepsilon})\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \rho(\frac{x}{\varepsilon})(y_\varepsilon^1 - v_\varepsilon(T))\phi_\varepsilon^0\mathrm{d}x \tag{7}$$

这里 ϕ_ε 是系统

$$\begin{cases} -\rho(\frac{x}{\varepsilon})\phi'_\varepsilon - \operatorname{div}(A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla\phi_\varepsilon) = 0 & (x,t) \in Q, \\ \phi_\varepsilon = 0 & (x,t) \in \sum, \\ \phi_\varepsilon(x,T) = \phi_\varepsilon^0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

的解，v_ε 是系统

$$\begin{cases} \rho(\frac{x}{\varepsilon})v'_\varepsilon - \operatorname{div}(A(\frac{x}{\varepsilon})\nabla v_\varepsilon) = 0 & (x,t) \in Q, \\ v_\varepsilon = 0 & (x,t) \in \sum, \\ v_\varepsilon(x,0) = y_\varepsilon^0(x) & x \in \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

的解.

引理2　假设定理1的条件成立，则泛函 J_ε 满足

$$\liminf_{\varepsilon \to 0,\ \|\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} \to \infty} \frac{J_\varepsilon(\phi_\varepsilon^0)}{\|\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}} \geqslant \alpha \tag{10}$$

且极小值点序列 $\{\phi_\varepsilon^0\}_{\varepsilon \geqslant 0}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是一致有界.

证明. 假设序列 $\{\varepsilon_j\}_{j \geqslant 1}$ 和 $\{\phi_{\varepsilon_j}^0\}_{j \geqslant 1} \in L^2(\Omega)$ 满足当 $j \to \infty$ 时，$\varepsilon_j \to 0$ 且 $\|\phi_{\varepsilon_j}^0\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$，显然有 $\|\rho(x/\varepsilon)\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$. 为了方便，仍就定义为子列，有当 $\varepsilon \to 0$，$\|\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ 相应于初值 $\Psi_\varepsilon^0 = \phi_\varepsilon^0 / \|\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}$ 时系统(8)的解为 $\Psi_\varepsilon = \phi_\varepsilon / \|\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}$. 易知在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 中 Ψ_ε 弱 * 收敛于 Ψ，这里 Ψ 相应初值 $\phi^0(x) = \Psi^0$ 时系统(8)取极限时的解.

由函数 J_ε 的定义，有

$$J_\varepsilon(\phi_\varepsilon^0)/(\rho(x/\varepsilon)\phi_\varepsilon^0) = \frac{1}{2}\|\rho(x/\varepsilon)\phi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)} \times \int_0^T\int_\omega \|\Psi_\varepsilon\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \alpha - \int_\Omega \rho(x/\varepsilon)(y_\varepsilon^1 - v_\varepsilon(T))\Psi_\varepsilon^0\mathrm{d}x \tag{11}$$

有下面两种情况：

1) $\liminf_{\varepsilon \to 0}\int_0^T\int_\omega \|\Psi_\varepsilon\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t > 0$;

2) $\liminf_{\varepsilon \to 0}\int_0^T\int_\omega \|\Psi_\varepsilon\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$.

易知情况1)时，式(10)成立，在情况2)，有

$\Psi = 0 \quad (x,t) \in \omega \times (0,T)$. 根据 Holmgren 唯一性定理和 $\Psi \in C([0,T];L^2(\Omega))$,则有 $\Psi^0 = 0$,于是易得式(10). 另一方面,令 $I_\varepsilon = \inf\limits_{\phi^0 \in L^2(\Omega)} J_\varepsilon(\phi^0)$. 显然,对任意 $\varepsilon > 0, I_\varepsilon \leqslant 0$. 又因为 $J_\varepsilon(0) = 0$. 因此,极小值点 $\{\phi_\varepsilon^0\}_{\varepsilon \geqslant 0}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中是一致有界. 得证.

引理3 假设满足引理2的条件,当 $\varepsilon \to 0$ 时,则极小化序列 $\{\bar{\phi}_\varepsilon^0\}_\varepsilon$ 和函数 J_ε,在 $L^2(\Omega)$ 中满足 $\rho(\frac{x}{\varepsilon})\bar{\phi}_\varepsilon^0$ 强收敛于 $\bar{\rho}\,\bar{\phi}^0$;在 $C([0,T];L^2(\Omega))$ 中满足 $\bar{\phi}_\varepsilon$ 强收敛于 $\bar{\phi}$,这里 $\bar{\phi}$ 相应初值 $\bar{\phi}^0$ 时系统(8)取极限时的解.

证明:由引理1知 $\{\rho(x/\varepsilon)\bar{\phi}_\varepsilon^0\}_{\varepsilon \geqslant 0}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中一致有界,抽出子列仍定义其本身,当 $\varepsilon \to 0$ 时,在 $L^2(\Omega)$ 中,有 $\rho(x/\varepsilon)\bar{\phi}_\varepsilon^0$ 弱收敛于 $\bar{\rho}\,\bar{\phi}^0$ 接下来,证明 $\bar{\varphi}^0 = \bar{\phi}^0$ 或

$$J(\bar{\varphi}^0) \leqslant J(\varphi^0) \quad \forall \varphi^0 \in L^2(\Omega) \tag{12}$$

由文献[3]知,在 $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ 中,有 $\bar{\phi}_\varepsilon$ 弱 $-^*$ 收敛于 $\bar{\varphi}$,这里 $\bar{\varphi}$ 相应初值 $\bar{\varphi}^0$ 系统(8)取极限时的解. 注意到式(5)和函数 J 的下半连续性,得

$$J(\bar{\varphi}^0) \leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\bar{\phi}_\varepsilon^0)$$

且对 $\forall \varphi^0 \in L^2(\Omega)$,有

$\liminf\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\bar{\phi}_\varepsilon^0) \leqslant \liminf\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\bar{\rho}\varphi^0/\rho(x/\varepsilon))$ 于是

$$J_\varepsilon(\bar{\rho}\varphi^0/\rho(x/\varepsilon)) - J(\varphi^0) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\varphi_\varepsilon|^2 - \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega |\varphi|^2 - \int_\Omega \bar{\rho}[(y_\varepsilon^1 - v_\varepsilon(T)) - (y^1 - v(T))]\varphi^0 \mathrm{d}x \tag{13}$$

对任意固定 $\varphi^0 \in L^2(\Omega)$ 有 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\bar{\rho}\varphi^0/\rho(x/\varepsilon)) = J(\varphi^0)$

这里 φ_ε 相应初值 $\bar{\rho}\varphi^0/\rho(x/\varepsilon)$ 时系统(12)的解. 由文献[3]知,当 $\varepsilon \to 0$ 时,式(12)收敛于0. 联合上述各式,得(12). 令 $I = \inf\limits_{\phi^0 \in L^2(\Omega)} J(\phi^0)$,易知当 $\varepsilon \to 0$ 时,有 $I_\varepsilon = \inf\limits_{\phi^0 \in L^2(\Omega)} J_\varepsilon(\phi^0) \to I$. 又联合上述各式,易得到问题的证明.

定理1的证明. 由文献[3]和上述引理,易得当 $\varepsilon \to 0$ 时,在 $L^2(\omega \times (0,T))$ 中,有 ψ_ε 强收敛于 ψ,在 $C([0,T];L^2(\Omega))$ 中 y_ε 强收敛于 y 且式(4)成立. 得证.

参考文献:

[1] Fabre C J, Puel P, Zuazua E. Approximate controllability of the semilinear heat equation[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1995, 125:31 - 61.

[2] 王耀东. 偏微分方程中的 L² - 理论[M]. 北京:北京大学出版社, 1989.

[3] Castro C, Zuazua E. Some topics on the control and homogenization of parabolic Partial Differential Equations [C]//Proceedings of the First HMS2000 International School and Conference on Homogenization, Tokyo, Naples, 2003:45 - 94.

[4] Zuazua E. Controllability of the linear system of thermoelasticity[J]. J. Math. Pures Appl., 1995, 74:303 - 346.

[5] Zuazua E. Approximate controllability for linear parabolic equations with rapidly oscillating coeffcients[J]. Control and Cybernetics, 1994, 23(4):1 - 8.