

Tokamak 等离子体中快波电流驱动的扩散系数

尹 岚, 龚学余*, 刘 燕

(南华大学 核科学技术学院, 湖南 衡阳 421001)

摘 要:利用由全波方法求解得到的离子回旋频率范围内快波在等离子体中激发产生的电场,采用 Kennel 和 Engelman 给出的扩散系数表达式,通过数值计算得到了离子回旋频率范围内快波在速度空间下的准线性扩散系数.利用其结果求解 Fokker-planck 方程,为进一步研究离子回旋频率范围内的快波在 Tokamak 等离子体中的电流驱动提供了理论基础.

关键词:准线性扩散系数; Fokker-planck 方程; 快波

中图分类号:TL631

文献标识码:A

A Study of Quasilinear Diffusion Coefficient of the Fokker – Planck Equation Based on Full Wave Method

YIN Lan, GONG Xue-yu*, LIU Yan

(School of Nuclear Science and Technology, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: Based on the wave fields evaluated by full wave method, the various components of quasilinear diffusion coefficient in spherical velocity coordinates are obtained by numerically resolving. The quasilinear diffusion coefficient of Fokker – planck equation is presented for investigating fast wave current drive in the ion cyclotron range of frequencies, and the results will be used to solve bounce – averaged quasilinear Fokker – Planck equation for further study of fast wave current drive.

Key words: diffusion coefficient; Fokker – planck equation; fast wave

0 引言

为实现未来托卡马克聚变堆的稳态运行和等离子体高性能运行,研究非感应电流驱动极具意义.其中离子回旋频率范围内的快波电流驱动

(FWCD)是一种很有吸引力的电流驱动方法,其主要优点是能够传播到高密度的等离子体中心,且由于快波的波长相对较长,相对于目前的托卡马克装置尺度更适用于驱动反应堆级等离子体中的等离子体电流,具有较高的电流驱动效率.因

收稿日期:2009-01-14

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10475039)

作者简介:尹 岚(1982-),女,湖南衡阳人,南华大学核科学技术学院硕士研究生.主要研究方向:核聚变与等离子体物理. * 通讯作者.

此,开展快波在等离子体中电流驱动的研究具有重要意义。

人们在研究波在托卡马克中电流驱动中,需要获得波在等离子体中功率沉积、驱动电流分布及驱动效率电流驱动效率等,为此需要知道电子数密度在速度空间中的分布,而电子分布函数由 Fokker - planck 方程决定,需要求解 Fokker - planck 方程,为求解 Fokker - planck 方程需要知道波与等离子体相互作用使电子、离子在速度空间迁移产生的扩散系数,该系数如按原始的定义直接计算相当困难,理由是扩散系数与波在等离子体中激发电场有关,而电场求解十分困难,因此在大多数情况下采用各种近似给出其表达式,如在研究电子回旋波^[1]、低混杂波电流驱动中,但这样做会带来误差。文章利用全波法^[2]求解出快波在等离子体中激发电场,再根据定义计算扩散系数,为进一步求解 Fokker - planck 方程奠定基础。

1 物理模型

1.1 全波方法

根据快波电流驱动的物理机制,从麦克斯韦方程组出发,建立起环形对称托卡马克等离子体中离子回旋频率范围内的快波电流驱动下的全波方程:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} (\vec{E} + \frac{i\mu_0 c^2}{\omega} (\vec{J}^p + \vec{J}^A)) \quad (1)$$

上式中 $\vec{J}^p$ 表示等离子体电流, $\vec{J}^A$ 表示天线上的电流, 其中, $\hat{u}_s = \hat{u}_r, \hat{u}_\eta = \hat{u}_\zeta \times \hat{u}_s, \hat{u}_\zeta = \frac{\vec{B}}{B}$ 。

把全波方程(1) 写为伽辽金弱变分形式的积分 - 微分全波方程:

$$\int d\mathbf{v} \vec{F}^* \cdot \left\{ -\frac{c^2}{\omega^2} \nabla \times \nabla \times \vec{E} + \vec{E} + \frac{4\pi i}{\omega} (\vec{J}^p + \vec{J}^A) \right\} = 0 \quad (2)$$

在极向 θ 上对变量进行傅立叶变换如下:

$$E_\alpha = e^{im\theta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_\alpha^m(n_\varphi, r) e^{im\theta} \quad (3)$$

伽辽金弱变分形式积分 - 微分全波方程就变成了如下形式:

$$\begin{aligned} & \sum_m \sum_{m'} \iint re^{i(m'-m)\theta} (\vec{F}^{(m)*}(r) \cdot \vec{Q}^{op}(m, m') \cdot \\ & \vec{E}^{(m')}(r)) d\theta dr + \sum_{r_i} \sum_{m'} \int re^{i(m'-m)\theta} (\vec{F}^{(m)*}(r_i) \cdot \\ & \vec{S}^{(op)} \cdot \vec{E}^{(m')}(r_i)) d\theta = \frac{4\pi i}{\omega} \sum_m \iint re^{im\theta} (\vec{F}^{(m)*}(r) \cdot \\ & \vec{J}_A(n_\varphi, r, \vartheta)) d\theta dr \end{aligned} \quad (4)$$

在考虑有限拉莫尔半径假设和平行色散后, 对全波方程在极向 θ 上用快速傅里叶变换(FFT)和卷积定理; 在径向 r 上用三次哈密顿有限元方法离散。通过对全波方程的数值求解即可得托卡马克等离子体中快波电流驱动下的电场分布

1.2 准线性扩散系数

电子、离子在托卡马克中由于磁镜效应, 捕获粒子在磁场中来回往复作香蕉轨道运动, 对粒子分布产生影响, 在研究中采用反弹平均 Fokker - planck 方程来描述粒子运动, 使方程模型更实际地反映粒子的动力论过程, 方程形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{dF_e}{dt} &= \frac{dF_e}{dt} + (\vec{v}_D + v_\parallel \vec{b}_0) \cdot \vec{\nabla} F_e + \\ & \frac{Ze}{m} E_{0\parallel} \vec{b}_0 \cdot \frac{\partial F_e}{\partial \vec{v}} = \hat{C}(F_e) + \hat{Q}(F_e) \end{aligned} \quad (5)$$

$\vec{v}_D$ 表示漂移速度, $\vec{b}_0 = \vec{B}_0/B_0$ 表示磁场的单位向量, $E_{0\parallel}$ 表示欧姆电场, $S(F_e)$ 是碰撞项^[3], $Q(F_e)$ 是由波场与等离子体作用产生扩散项^[4], 形式如下:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(F_\alpha) &= -\frac{Ze}{m_\alpha} \frac{1}{\hat{\lambda}_B} \oint R J_p \frac{B}{v_\parallel} \times \text{Re} \\ & < \vec{\nabla}_v \cdot [(\vec{\varepsilon} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B})^* f_\alpha] > d\theta \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{其中 } \hat{\lambda}_B = \oint R J_p \frac{B}{v_\parallel} d\theta \quad (7)$$

$\vec{\varepsilon}$ 和 $\vec{B}$ 分别表示波电场和磁场, f_α 粒子速度空间的分布函数, R 是大半径, $\parallel$ 下标和 $\perp$ 下标分别表示某个向量的平行和垂直磁场的分量, $\vec{v}$ 为电子速度, $\langle \cdot \rangle$ 表示在波周期 ω^{-1} 和速度空间的回旋角度 θ 求平均, 式(5) 中的反弹平均符号 $\hat{C}$ 是假定从波中吸收的能量在很短的时间 τ_B 至 qR/v_{the} 内重新分配到各个磁面, 并且粒子维持在相同磁面的时间比反弹或渡越时间长得多, 事实上, 电子的相关计算能很好的符合这些条件。

定义 $\varepsilon_v = (v_\parallel^2 + v_\perp^2)/2, \mu_v = v_\perp^2/2B$ 两个移动速度坐标, $\vec{Q}(F_\alpha)$ 得到如下形式:

$$\begin{aligned} \hat{Q}(F_\alpha) &= \frac{1}{\hat{\lambda}_B} \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon_v} (\hat{D}_{\varepsilon_v \varepsilon_v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varepsilon_v} + \hat{D}_{\varepsilon_v \mu_v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mu_v}) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \mu_v} (\hat{D}_{\mu_v \varepsilon_v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \varepsilon_v} + \hat{D}_{\mu_v \mu_v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mu_v}) \right] \quad (8) \end{aligned}$$

$\hat{D}_{\varepsilon_v \varepsilon_v}, \hat{D}_{\varepsilon_v \mu_v}, \hat{D}_{\mu_v \varepsilon_v}, \hat{D}_{\mu_v \mu_v}$ 为速度空间坐标下的扩散系数各个分量。

对(6)式电场和磁场可以在极向 θ 上和环向 φ 上做双向傅立叶展开,得到如下形式:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \sum_{n, m} \vec{\mathcal{E}}^{n, m}(\psi) e^{i(m\theta + n\varphi - \omega t)} \quad (9)$$

磁场形式类似,其中 ψ 表示磁面,要计算准线性扩散系数,由快波电流驱动的原理,只需考虑电子的切伦科夫共振情况,并采用有限拉莫尔半径假设,由 Kennel 和 Engelman 在文献[5]中给出的准线性扩散项,把式(8)中的其他系数消去,准线性扩散系数得到如下形式:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\varepsilon, \varepsilon_r}^e &= \frac{e^2}{2m_e^2} \text{Re} \sum_n \sum_{m_1, m_2} \oint R J_p \frac{B}{v_{\parallel}} d\theta e^{i(m_2 - m_1)\theta} \times \\ &\int_{-\infty}^t \exp(i(m_2 + qn)(\theta' - \theta) - \omega(t' - t)) \times (v_{\parallel} \varepsilon^{m_1, n} - i \frac{\omega}{2\Omega_{ce}} \frac{v_{\perp}^2}{c} B_{\parallel}^{m, n_1})^* \times \\ &(v_{\parallel} \varepsilon_t^{m_2, n} - i \frac{\omega}{2\Omega_{ce}} \frac{v_{\perp}^2}{c} B_{\parallel}^{m_2, n}) dt' \quad (10) \end{aligned}$$

跟随电子引导中心沿着磁力线对 t' 积分, q 是安全因子.考虑对准线性扩散系数 $\hat{D}_{\varepsilon, \varepsilon_r}^e$ 主要贡献来自于象切伦科夫共振这样被积函数相位静止的点,并且,绝大部分电子的共振长度只占环向连接长度 qR 非常小的部分,忽略在渡越共振时平行方向加速,用 δ 函数对 θ 积分得到^[6]:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\varepsilon, \varepsilon_r}^e &= \frac{\pi}{\omega} \frac{e^2}{2m_e^2} \text{Re} \sum_n \sum_{m_1, m_2} [R J_p \frac{B}{v_{\parallel}} e^{i(m_2 - m_1)\theta} \times \\ &(v_{\parallel} \varepsilon^{m_1, n} - i \frac{\omega}{2\Omega_{ce}} \frac{v_{\perp}^2}{c} B_{\parallel}^{m, n_1})^* W^{m_2, n} \times \\ &(v_{\parallel} \varepsilon_t^{m_2, n} - i \frac{\omega}{2\Omega_{ce}} \frac{v_{\perp}^2}{c} B_{\parallel}^{m_2, n})]_{\theta=\theta_R} \quad (11) \end{aligned}$$

其中 ω 是波频率, m_e 和 e 是电子质量和电量, n 是环向模数, m_1, m_2 是双极向模数,考虑速度分布为麦克斯韦速度分布,电场和磁场分布可由全波法计算给出.式(11)中极向角 $\theta_R = \theta_R^{m_2, n}(\psi, v_{\parallel})$ 由共振条件^[7]决定:

$$k_{\parallel}^{m_2, n} = \frac{m_2}{N_{\theta}} \sin \Theta + \frac{n}{R} \cos \Theta = \frac{\omega}{v_{\parallel}} \quad (12)$$

平行波数 $k_{\parallel}^{m_2, n}$ 跟极向模数 m 相关,但是在计算离子回旋频率范围内快波电流驱动的扩散项时可以忽略平行方向的色散,得到:

$$k_{\parallel}^{m_2, n} = \frac{n}{R_0 + r \cos \theta} = \frac{\omega}{v_{\parallel}} \quad (13)$$

共振极向角:

$$\theta = \arccos \frac{nv_{\parallel} - \omega R_0}{\omega r} \quad (14)$$

式(11)中

$$W^{m_2, n}(\psi, v_{\parallel}) = \left| \frac{k_{\parallel}^{m_2, n}}{\partial k_{\parallel}^{m_2, n} / \partial \theta} \right|_{\theta=\theta_R} \quad (15)$$

$W^{m_2, n}$ 与电子跟模数为 m_2, n 的局部波共振的时间成比例,代入共振极向角得到:

$$\begin{aligned} W^{m_2, n}(\psi, v_{\parallel}) &= \left| \frac{k_{\parallel}^{m_2, n}}{\partial k_{\parallel}^{m_2, n} / \partial \theta} \right|_{\theta=\theta_R} \\ &= \left| \frac{(n + m/q)/R_0 + r \cos \theta}{r(n + m/q) \sin \theta / R_0 + r \cos \theta} \right|_{\theta=\theta_R} \\ &= \left| \frac{1}{r \sin \theta} \right|_{\theta=\theta_R} \quad (16) \end{aligned}$$

把扩散系数项变换成速度空间的正交坐标系,得到:

$$\hat{D}_{\varepsilon, \varepsilon_r}^e = v_{\parallel}^2 (D_{LD}(v_{\parallel}) + D_{MX}(v_{\parallel}) v_{\perp}^4 + D_{TIMP}(v_{\parallel}) v_{\perp}^4) \quad (17)$$

其中 D_{LD}, D_{MX}, D_{TIMP} 分别对应朗道衰减项,混合项,渡越时间项.由于波与共振粒子相互作用主要使电子平行方向上的速度发生变化,而式中垂直方向上的速度分量只是一个参数.

为求解 Fokker-plank 方程,最终需要把移动坐标下的 ε_r 和 μ_r 转换为球面坐标系下的 v 和 θ_0 ,准线性扩散项变为:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{avg}(F_e) &= \frac{1}{v_2} \frac{\partial}{\partial v} [v^2 (\hat{D}_{\omega} \frac{\partial F_e}{\partial v} + \hat{D}_{\omega_0} \frac{\partial F_e}{\partial \theta_0})] + \\ &\frac{1}{v \sin \theta_0} \frac{\partial}{\partial \theta_0} [(\hat{D}_{\theta_0, v} \frac{\partial F_e}{\partial v} + \\ &\hat{D}_{\theta_0, \theta_0} \frac{\partial F_e}{\partial \theta_0})] \quad (18) \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \hat{D}_{v, v} = \frac{1}{v^2} \hat{D}_{\varepsilon_r, \varepsilon_r}^e \quad (19)$$

$$\hat{D}_{v, \theta_0} = -\frac{1}{v^3} \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \hat{D}_{\varepsilon_r, \varepsilon_r}^e \quad (20)$$

$$\hat{D}_{\theta_0, v} = -\frac{1}{v^2} \frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} \hat{D}_{\varepsilon_r, \varepsilon_r}^e \quad (21)$$

$$\hat{D}_{\theta_0, \theta_0} = \frac{1}{v^3} \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} \hat{D}_{\varepsilon_r, \varepsilon_r}^e \quad (22)$$

文章将根据全波方法求出的电场分别对这些系数进行求解.

2 数值计算及结果分析

计算中采用的托卡马克和等离子体以及波的基本参数为:大半径 $R_0 = 1.65$ m,小半径 $a_0 = 0.70$ m,中心环向磁场 $B_0 = 2.00$ T,等离子体电流 $I_0 = 7.5 \times 10^5$ A(中心处的粒子密度), $n_{0e} = n_{0i} = 8.0 \times 10^{19}/\text{m}^3$ (中心处的粒子密度), $t_{0e} = t_{0i} = 2$ keV,天线发射的波频率 $\omega = 30$ MHz. 具体的计

算过程认为电子的速度分布为麦克斯韦速度分布,把有全波方程求出的电场代入式(11),极向角由共振条件式(12)决定,对应不同的极向模数和环向模数做线性叠加计算出准线性扩散系数。

图1给出了电子平行方向上的速度的径向分布, $v_{the} = \sqrt{2T_e/m_e}$, 其中 $T_e = T_{\infty}(1 - (r/a)^2)$ 。

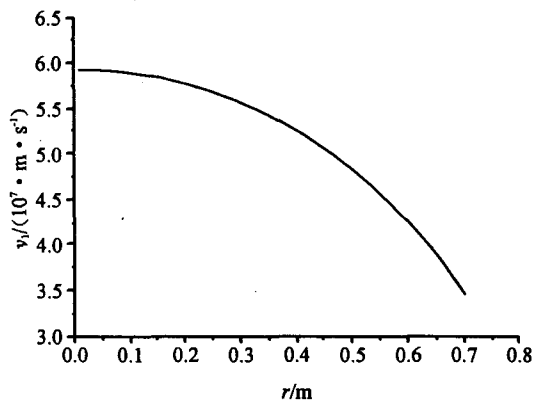


图1 平行方向速度分布

Fig.1 Distribution of $v_{\parallel}$

图2给出由全波法计算出的平行方向电场分布.结果显示,电场可以传播到等离子体中心,并在中心区域出现振荡。

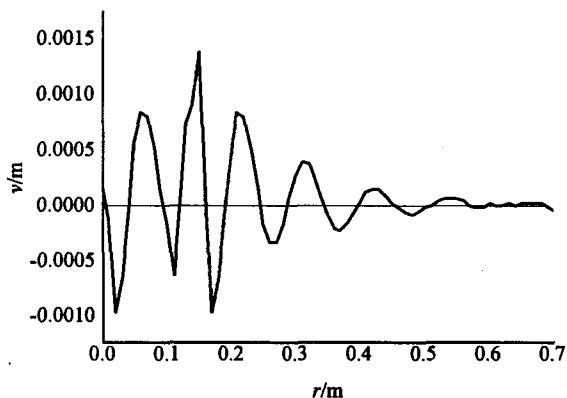


图2 平行方向电场径向分布

Fig.2 Distribution of $E_{\parallel}$

图3给出了频率为 7.195×10^8 Hz 的快波电流驱动下的准线性扩散系数的径向分布,在热等离子体模型下,等离子体的电磁性质对频率的变换非常敏感,快波频率的选取决定了波粒子能否发生共振,从图中可看出扩散系数受快波激发电场影响在等离子体中心区域出现较大值。

图4,图5分别给出了把漂移坐标变换为球面速度坐标 v, θ 的准线性扩散系数的各分量分布。

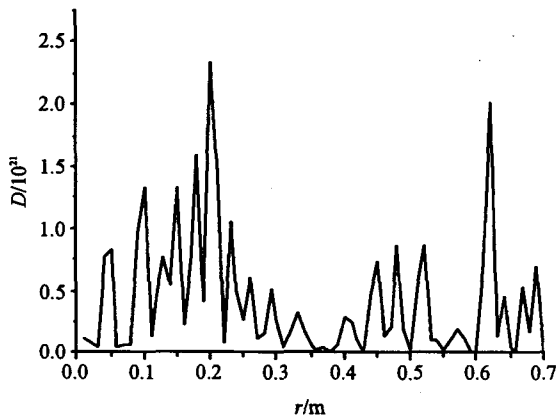


图3 准线性扩散系数径向分布

Fig.3 Distribution of quasilinear diffusion coefficient

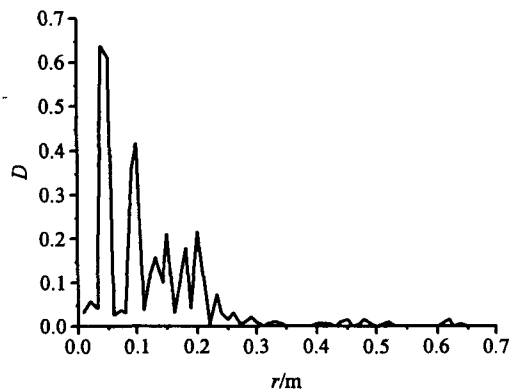


图4 $D_{\parallel}$ 的径向分布

Fig.4 Distribution of $D_{\parallel}$

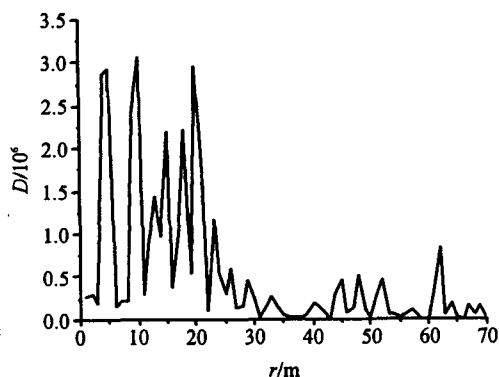


图5 $D_{\perp}$ 的径向分布

Fig.5 Distribution of $D_{\perp}$

3 结论

文章基于全波方法,求解 Fokker - planck 方程中的准线性扩散系数,根据 Kennel 和 Engelman 采用磁面平均推导出的扩散项表达式,考虑共振条件,利用全波法求出的等离子体中的电场,通过数值计算得到了速度空间下的扩散系数各个分量,结果表明扩散系数与快波激发电场密切联系,等离子体的电磁性质对频率的变换非常敏感,快波频率的选取决定了波粒子能否发生共振,本文求出的扩散系数相比其他方法更精确.

随后的工作计算将计算扩散系数在径向每一点上的速度分布,对快波电流驱动下的 Fokker - Planck 方程进行数值求解,对快波驱动功率沉积、驱动电流分布及加热功率开展进一步计算和研究.

参考文献:

- [1] 龚学余,彭晓炜,谢安平,等.托卡马克等离子体不同运行模式下的电子回旋波电流驱动[J].物理学报,2006,55(3):1307-1314.
- [2] 刘 燕,龚学余,杨 磊,等.用全波法研究托卡马克中快波电流驱动的基本理论[J].南华大学学报(自然科学版),2007,21(1):1-6.
- [3] Karney C F F. Using quasi-linear diffusion to model acceleration and loss from wave-particle interactions[J]. Comput. Phys. Comm, 1986(4):179-186.
- [4] Bilato R, Brambilla M, Pavlenko I, et al. Simulation of fast wave current drive in tokamaks in the ion cyclotron frequency[J]. Nucl. Fusion, 2002, 42(9):1085-1088.
- [5] Kennel C F, Engelmann F. Velocity space diffusion from weak plasma turbulence in a magnetic field[J]. Plasma Phys. Control. Fusion, 1966, 9(12):2377-2388.
- [6] Stix T H. Fast-wave heating of a two-component plasma[J]. Nucl. Fusion, 1975, 15(10):737-754.
- [7] Brambill M, Bilato R. Simulation of ion cyclotron heating of tokamak of plasmas using coupled Maxwell and quasi-linear - Fokker - Planck solvers [J]. Nucl. Fusion, 2006, 46(7):387-396.