文章编号:1673 - 0062(2009)01 - 0066 - 03

类带弱奇异核的偏积分微分方程空间半离散的稳定性

吴忠怀[1,2],余新良[2]

(1. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院,中国 长沙 410081;
2. 岳阳职业技术学院 机电工程系,湖南 岳阳 414000)

摘　要:给出了一类带弱奇异核的偏积分微分方程的关于时间连续的 Legendre - Galerkin 谱空间半离散格式及稳定性的证明,其误差界比较好.

关键词:偏积分微分方程;谱配置方法;稳定性

中图分类号:O175.2　　**文献标识码**:A

Stability of Spatial Half Discretization for a Partial Integro - Differential Equation With a Weakly Singular Kernel

WU Zhong-huai[1,2], YU Xin-liang[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha, Hunan 410081, China; 2. Department of electrical and mechanical engineering, Yueyang vocational and Technical College, Yueyang, Hunan 414000, China)

Abstract: In this paper, given the stability of the spatial Legendre - Galerkin's semi - discrimination for a partial integro - differential equation which is continuous in the direction of t.

Key words: partial integro - differential equation; spectral collection methods; stability

1　预备知识

研究下面一类偏积分微分方程

$$u_t(x,t) = \int_0^t \beta(t-s)\,\triangle u(x,s)\,\mathrm{d}s + f(x,t) \tag{1}$$

(其中核 $\beta(t) = t^{-1/2}$,在 $t = 0$ 点是奇异的) $x \in \Omega = (-1,1)^2$,$0 < t$,有如下边界条件:

$$u(x,t)\mid_{\partial\Omega} = 0,\ 0 < t \tag{2}$$

和如下初始条件:

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega \tag{3}$$

其中,$\triangle$ 是一个二维的拉普拉斯算子,$\partial\Omega$ 是单位正方形区域 Ω 的边界.

问题(1) ~ (3) 常出现在带有粘弹性力的流体模型及带有记忆功能的热传导物质. 国内外有很多人研究了这类方程. 陈传淼、V. Thomée 和 L.

收稿日期:2008 - 11 - 22
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10271046)
作者简介:吴忠怀(1962 -),男,湖南岳阳人,湖南师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,岳阳职业技术学院机电工程系副教授. 主要研究方向:计算数学.

B. Wahlbin 采用向后 Euler 格式,空间方向采用线性有限元,积分项通过内积求积技巧进行离散,得到解的正则性条件及误差估计. J. C. López - Marcos 研究了一类非线性的积分微分方程,采用了一阶时间全离散差分格式. W. Mclean, V. Thomée 使用了 Euler 和二阶向后差分格式,空间方向采用 Galerkin 有限元方法,并给出了正则性估计. 徐大考虑了 Euler 和 Crank - Nicolson 格式和一阶、二阶卷积求积,得到了带权的误差估计. 并且使用 Galerkin 和配置方法进行时间离散,得到最优阶误差估计和空间方向使用正交样条配置方法,得到空间半离散的稳定性和收敛性,而且时间方向使用有限元并且允许变时间步长.

首先定义正交投影算子:$P_N : L^2 \to P_N^0(\Omega)$, $P_N^0(\Omega)$ 是边界上为 0 的 N 次多项式空间,

$$(v - P_N v, \phi) = 0, \phi \in P_N^0(\Omega). \tag{4}$$

我们还将用到下面的引理:

引理 1　$\beta(t) \in L^{1,loc}(0,\infty)$ 为正类型,当且仅当,

$$\mathrm{Re}\hat{\beta}(s) \geqslant 0, 对\ s \in \{s \in C, \mathrm{Re}s > 0\} \tag{5}$$

其中的 $\hat{\beta}$ 表示 β 的拉普拉斯变换. 证明:见文献[1].

为了分析其稳定性,我们再介绍定义在 $[0,\infty)$ 的函数 u 的拉普拉斯变换:

$$\hat{u}(s) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-st} \mathrm{d}t,$$

同时回顾它的一些性质:

命题 2(卷积定理) 如果:

$$a * u(t) = \int_0^t a(t-\tau) u(\tau) \mathrm{d}\tau, t \in (0,\infty),$$

那么有:

$$\widehat{a * u}(s) = \hat{a}(s)\hat{u}(s). \tag{6}$$

引理 3(Parseval 等式)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(s_0 + \mathrm{i}\zeta)\hat{v}(s_0 + \mathrm{i}\zeta) \mathrm{d}\zeta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} u(t) v(t) \mathrm{d}t, \tag{7}$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| \hat{u}(s_0 + \mathrm{i}\zeta) \|_{\hat{H}}^2 \mathrm{d}\zeta = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} \| u(t) \|^2 \mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中 $i^2 = -1, s_0 \geqslant 0, \hat{H}$ 是 H 的复化.

证明:见文献[2].

引理 4 对 $s_0 > 0$,如果

$$\int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} v^{(1)}(t) v(t) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} f(t) v(t) \mathrm{d}t$$

成立($v^{(1)}(t)$ 表示 v 关于 t 的一阶导数),那么就有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} v^2(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{s_0} v^2(0) + \frac{1}{s_0} \int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} f^2(t) \mathrm{d}t$$

2　Legendre - Galerkin 空间半离散及稳定性

在这一节里,我将用关于时间连续的 Legendre - Galerkin 谱来逼近式(1) ~ 式(3) 的解,记 x 方向半离散近似解为 $u_N(t): [0,\infty) \to P_N^0(\Omega)$,其中 $P_N^0(\Omega)$ 是边界上为 0 的 N 次多项式空间,式(1) ~ 式(3) 的离散格式可写成如下形式:

$$\begin{cases} (u_{N_t}, \chi) = \int_0^t \beta(t-s)(\triangle u_N(s), \chi) \mathrm{d}s + (f(t), \chi), \forall \chi \in P_N^0(\Omega) \\ u_N(0) = P_N u_0 \end{cases} \tag{9}$$

下面将证明 Legendre - Galerkin 空间半离散解的稳定性.

定理 5　(稳定性) 考虑初边值问题(9),有:

$$\int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} \| u_N(t) \|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{s_0} \| u_0 \|^2 + \frac{1}{s_0^2} \int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} \| f(t) \|^2 \mathrm{d}t \tag{10}$$

证明:对式(4) 两端应用拉普拉斯变换结合式(6) 得:

$$(\frac{\partial u_N}{\partial t}(S), \chi) = \hat{\beta}(s)(\triangle \hat{u}_N(S), \chi) + (\hat{f}(S), \chi)$$

取 $\chi = \hat{u}_N(S)$ 得:

$$(\frac{\partial u_N}{\partial t}(S), \hat{u}_N(S)) = \hat{\beta}(s)(\triangle \hat{u}_N(S), \hat{u}_N(S)) + (\hat{f}(S), \hat{u}_N(S))$$

设 $s = s_0 + \mathrm{i}\zeta (s_0 > 0)$,对两边同时取实部得:

$$\mathrm{Re}((\frac{\partial u_N}{\partial t}(s_0 + \mathrm{i}\zeta), \hat{u}_N(s_0 + \mathrm{i}\zeta))) = \mathrm{Re}(\hat{\beta}(s_0 + \mathrm{i}\zeta))(\triangle \hat{u}_N(s_0 + \mathrm{i}\zeta), \hat{u}_N(s_0 + \mathrm{i}\zeta)) + \mathrm{Re}((\hat{f}(s_0 + \mathrm{i}\zeta), \hat{u}_N(s_0 + \mathrm{i}\zeta)))$$

因为拉普拉斯算子 $-\triangle$ 具有正性,也即:

$$-(\triangle \hat{u}_N(s_0 + \mathrm{i}\zeta), \hat{u}_N(s_0 + \mathrm{i}\zeta)) \geqslant 0$$

由式(5),所以有:

$$\mathrm{Re}((\frac{\partial u_N}{\partial t}, \hat{u}_N)) \leqslant \mathrm{Re}((\hat{f}, \hat{u}_N))$$

利用拉普拉斯变换的 Parseval 等式(7) 得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial u_N}{\partial t}, \hat{u}_N)(s_0 + \mathrm{i}\zeta) \mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{\partial u_N}{\partial t}(s_0 + \mathrm{i}\zeta) \overline{\hat{u}_N}(s_0 + \mathrm{i}\zeta) \mathrm{d}\zeta \mathrm{d}\Omega$$

$$= 2\pi \int_\Omega \int_0^{+\infty} e^{-2s_0 t} \frac{\partial u_N}{\partial t} u_N \mathrm{d}t \mathrm{d}\Omega$$

同时有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{f},\hat{u}_N)(s_0+i\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$=\int_\Omega\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(s_0+i\zeta)\,\overline{\hat{u}_N}(s_0+i\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\Omega$$

$$=2\pi\int_\Omega\int_0^{+\infty}e^{-2s_0t}f(t)u_N(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

由上两式可得:

$$\int_\Omega\int_0^{+\infty}e^{-2s_0t}\frac{\partial u_N}{\partial t}(t)u_N(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}((\frac{\partial u_N}{\partial t},\hat{u}_N)(s_0+i\zeta))\mathrm{d}\zeta$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Re}((\hat{f},\hat{u}_N)(s_0+i\zeta))\mathrm{d}\zeta$$

$$=\int_\Omega\int_0^{+\infty}e^{-2s_0t}f(t)u_N(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

利用引理4,我们很容易得到:

$$\int_\Omega\int_0^{\infty}e^{-2s_0t}u_N^2(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

$$\leqslant\frac{1}{s_0}\int_\Omega u_N^2(0)+\frac{1}{s_0^2}\int_\Omega\int_0^{\infty}e^{-2s_0t}f^2(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

可以证明,$\|P_Nu_0\|\leqslant\|u_0\|$. 事实上,$u(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_iL_i(x)$,$L_i$ 代表 i 次 Legendre 多项式,

$$\|u\|^2=(u,u)=(\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_iL_i(x),\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_iL_i(x))=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_i^2(L_i(x),L_i(x))=\sum_{i=-\infty}^{\infty}u_i^2$$

可以得到: $\|P_N\|\leqslant1$.

所以有:

$$\int_0^{+\infty}e^{-2s_0t}\|u_N(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{s_0}\|u_0\|^2+\frac{1}{s_0^2}\int_0^{+\infty}e^{-2s_0t}\|f(t)\|^2\mathrm{d}t$$

3 数值例子

设所要求的近似解 $U_N(x,t)=\sum_{j=2}^{N}a_j(t)\varphi_j(t)$

其中 $\varphi_j(t)$ 为满足边界条件:$\varphi(-1)=\varphi(1)=0$ 的正交基,我们取

$$\varphi_j(x)=\sqrt{\frac{2j-1}{2}}\int_{-1}^{x}L_{j-1}(t)\mathrm{d}t$$

对式(9)两端作拉普拉斯变换得:

$$(\hat{u}_N,\chi)=\hat{\beta}(S)(\Delta\hat{u}_N(S),\chi)+(\hat{f},\chi),\text{令}\chi=\hat{u}\qquad(11)$$

数例:

$$u_t(x,t)=\int_0^t(t-S)^{-1/2}u_{xx}(x,s)\mathrm{d}s+f(x,t)$$

假设精确解为 $u(x,t)=(1+x)(1-x)t^{3/2}$,

$u(-1,t)=u(1,t)=0;u(x)=0;$

$$f(x,t)=\frac{3}{2}(1+x)(1-x)t^{1/2}+\frac{3}{4}\pi t^2$$

代入式(11),考虑初始条件,并取 $k=0.1$,$N=10$,取 $t=0.1,0.2\cdots0.5$ 进行比较. 见表1.

表1 误差表

Table 1 Error chart

t	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0$	$x=0.2$	$x=0.4$
0.1	0.010 6	0.012 3	0.012 9	0.012 3	0.010 6
0.2	0.013 3	0.015 7	0.016 6	0.015 7	0.013 3
0.3	0.012 4	0.015 0	0.015 9	0.015 0	0.012 4
0.4	0.009 4	0.011 6	0.012 4	0.011 6	0.009 4
0.5	0.004 9	0.006 4	0.007 0	0.006 4	0.004 9

由表1可以看出近似解能很好的逼近精确解,最大误差为0.015 9. 用关于时间连续的Legendre-Galerkin谱来逼近式(1)~式(3)的解所得出的误差界与参考文献当中的一些文章使用有限元方法(FEM),样条配置方法(spline collection methods)等所得的结果一致.

参考文献:

[1] Nohel J A, Shea K F. Frequency domain methods for Volterra equations[J]. Adv. in Math., 1976, 22(3): 278-304.

[2] Yan Y, Fairweather G. Orthogonal spline collection methods for some partial integro-differential equations[J]. SIAM. J. Numer. Anal, 1992, 29: 755-768.

[3] McLean W, Thómee V. Numerical solution of an evolution equation with a positive type memory term[J]. J. Austral. Math. Soc. Ser., 1993, B35: 23-70.

[4] Xu Da. The global behaviour of time discretization for an abstract Volterra equation in Hilbert space[J]. CALCOLO, 1997, 34: 71-104.