

关于无穷维 Möbius 变换的 Jørgensen 不等式

肖秋菊^{1,2}, 邹淑桢²

(1. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105; 2. 湖南交通工程职业技术学院, 湖南 衡阳 421001)

摘 要: 本文讨论了无穷维 Möbius 变换的两元生成子群离散非初等的条件, 并建立了特殊情形的 Jørgensen 不等式.

关键词: 无穷维 Möbius 变换; 离散; Jørgensen 不等式

中图分类号: O174.51 **文献标识码:** A

Jorgensen Inequality Transformed form Infinite - dimension Mobius

XIAO Qiu-ju^{1,2}, ZOU Shu-zhen²

(1. School of Mathematics and Computrtional, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, China;

2. Hunan Vocational College of Traffic Engineering, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: This paper discusses two dimensions transformed from infinite - dimension Mobius generates the nondiscrete subgroups of the primary conditions, and establishes Jorgensen inequality in special conditions.

Key words: Transformation of infinite - dimension Mobius; Discrete; Jorgensen inequality

0 引言

Möbius 群的离散性是 Möbius 群中一个既基本又重要的问题. 在文献[1]中, Jørgensen 建立了如下著名的不等式:

定理 1 若由 Möbius 变换 f 和 g 生成的群是离散且非初等的, 那么下列不等式成立:

$$|tr^2(f) - 4| + |tr(fgf^{-1}g^{-1} - 2)| \geq 1.$$

作为应用, Jørgensen 在文献[1-2]中证得了如下结果:

$SL(2, \mathbb{C})$ 中的非初等子群 G 是离散的当且仅当由 G 中任意两元生成子群是离散的.

Cao, Waterman^[3] 利用交比的一些共轭不变性质, 得到了与维数无关的高维 Jørgensen 不等式:

设 $\langle f, g \rangle$ 是离散非初等的, 且 f, g 都不是椭圆元素, 则当 f 和 g 没有共同的不动点时, 有

$$\|f - I\| \cdot \|g - I\| \geq \frac{1}{36}$$

本文结合 Jørgensen 和 Waterman 的证明方法, 根据无穷维 Möbius 变换的自身特点对 Jørgensen 不等式作进一步研究, 探讨无穷维两元生成子群离散非初等的条件, 主要结果是文中定理 3 和定理 5.

收稿日期: 2008-09-05

作者简介: 肖秋菊(1967-), 女, 湘潭大学数学与计算机科学学院硕士研究生, 湖南交通工程职业技术学院副教授. 主要研究方向: 高等代数.

1 无穷 Clifford 矩阵与无穷维 Möbius 变换

无穷维 Clifford 代数 ℓ 是由可数基 $\{i_k\}_{k=1}^{\infty}$ 在实数域 $\mathbb{R}$ 上生成的结合代数且满足:

$$i_k i_k = -i_k i_k (h \neq k), i_k^2 = -1, \forall h, k \geq 1.$$

于是, ℓ 中每个元素能唯一地表示成 $a = \sum a_l I$ 的形式, 其中 $I = i_{v_1} i_{v_2} \cdots i_{v_p}, 1 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_p \leq n$, 其中 n 是依整于 a 的一个固定数, 称为 a 的度; $a_l \in \mathbb{R}$ (即 a_l 均为实数) 且 $\sum_l a_l^2 < \infty$. 若 $I = \phi$, 则称 a_l 为 a 的实部, 记为 $\text{Re}(a)$; 其余部分称为 a 的虚部, 记为 $\text{Im}(a)$. 在 ℓ 上定义 Euclid 范数:

$$|a| = \sqrt{\sum_l a_l^2} = \sqrt{|\text{Re}(a)|^2 + |\text{Im}(a)|^2} \quad (1)$$

在 ℓ 上定义三种对合运算:

1) “ $'$ ” 运算: 将 a 的表达式中每个 i_k 用 $-i_k$ 代替 ($k \geq 1$), 这确定了 ℓ 上的一个自同构:

$$(ab)' = a'b', (a+b)' = a' + b';$$

2) “ $*$ ” 运算: 将 a 的表达式中每个 $i_{v_1} i_{v_2} \cdots i_{v_p}$ 用 $i_{v_p} i_{v_{p-1}} \cdots i_{v_1}$ 代替 ($k \geq 1$), 这确定了 ℓ 上的一个反自同构:

$$(ab)^* = b^* a^*, (a+b)^* = a^* + b^*;$$

3) “ $-$ ” 运算: $\bar{a} = (a^*)' = (a')^*$ 这也确定了 ℓ 上的一个反自同构.

在 ℓ 中, 称形如 $x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_n i_n + \cdots$ 的元素为向量, 并记所有向量组成的空间为 $\ell_2, \bar{\ell}_2 = \ell_2 \cup \{\infty\}$. 对任意 $x \in \ell_2$ 有 $x^* = x, \bar{x} = x'$. 对 $x, y \in \ell_2$ 定义 x 与 y 的内积 $(x \cdot y)$ 为

$$(x \cdot y) = x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n + \cdots,$$

其中 $x = x_0 + x_1 i_1 + \cdots + x_n i_n + \cdots, y = y_0 + y_1 i_1 + \cdots + y_n i_n + \cdots$.

对非零向量 $x, \bar{x} x = x x = |x|^2 \neq 0$, 因此 x 可逆, 并记其逆为 $x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$. 显然能分解成有限个非零向量乘积的元素是可逆的, 所有这种元素构成一个乘群, 记为 Γ , 并称之为无穷维 Clifford 群.

定义2 若 2×2 阶矩阵 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足下列

条件:

$$(1) a, b, c, d \in \Gamma \cup \{0\};$$

$$(2) \Delta(g) = ad^* - bc^* = 1;$$

$$(3) ab^*, d^* b, cd^*, c^* a \in \ell_2,$$

则称 g 为无穷维 Clifford 矩阵, 其全体记为 $SL(\Gamma)$.

令

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}.$$

显然 g^{-1} 是 g 的逆元, 由简单的计算可知: $SL(\Gamma)$ 关于矩阵乘积构成群. 对任意的 Clifford 矩阵

$$g = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$g(x) = (ax + b)(cx + d)^{-1}.$$

这样的映射称为无穷维 Möbius 变换; 对应地, 所有这样的映射关于映射的复合构成群, 称之为无穷维 Möbius 变换群, 并仍记为 $SL(\Gamma)$.

2 主要结果

$SL(\Gamma)$ 中的子群 G 称为是初等的, 如果 G 在 $\bar{\ell}_2$ 中存在有限的 G 轨道, 即存在 $x \in \bar{\ell}_2$ 使得集合

$$G(x) = \{g(x), g \in G\}$$

是有限的; 否则称 G 称为是非初等的.

G 被称为是离散的, 若 G 不含有任何由不同元素构成的收敛序列.

定理3 设 G 是 $SL(\Gamma)$ 的离散子群, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, 则对任意

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G, \text{ 有 } |c| = 0 \text{ 或 } |c| \geq 1.$$

证明: 用反证法, 假定存在 $B \in G$ 使得 $0 < |c| < 1$, 令

$$X_0 = B, X_{m+1} = X_m A X_m^{-1},$$

$$X_m = \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix}, m = 0, 1, \cdots,$$

那么有

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 1 - a_m c_m^*, & b_{m+1} &= a_m a_m^*, \\ c_{m+1} &= -c_m c_m^*, & d_{m+1} &= 1 + a_m c_m^* \end{aligned} \quad (2)$$

特别地,

$$c_{m+1} = -(c_0 c_0^*)^{2^m},$$

$$|c_{m+1}| = |(c_0 c_0^*)^{2^m}| = |c_0|^{2^{m+1}}, m = 0, 1,$$

...

由 $0 < |c| < 1$ 有 $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = 0$.

下面证明 $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = A$. 事实上由式(2)有

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 1 - a_m c_m^* = 1 - c_m^* + a_{m-1} c_{m-1}^* c_m^* \\ &= 1 - c_m^* + c_{m-1}^* c_m^* - a_m + 2c_{m-2}^* c_{m-1}^* c_m^* \end{aligned}$$

$$|a_{m+1}| \leq |a_0| |c_0|^{2^m} + \sum_{i=0}^{2^m} |c_0|^i \leq K \sum_{i=0}^{2^m} |c_0|^i,$$

其中 $K = \max(|a|, 1)$, 因此 $\{a_n\}_0^\infty$ 是有界序列.

因为

$$|a_{m+1} - 1| = |a_m c_m^*| \leq \frac{K}{1 - |c_0|} |c_0|^{2^m},$$

于是

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = 1.$$

同理可证序列 $\{|b_n|\}, \{|d_n|\}$ 是有界的,从而完成了 $\lim_{m \rightarrow \infty} X_m = A$ 的证明. 由 $|c| \neq 0$ 有

$$|c_m| \neq 0, X_m \neq A, m = 1, \dots,$$

又群 G 离散,故假设不成立.

推论 4 设 $A, B \in SL(\Gamma)$ 满足:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

若 $\langle A, B \rangle$ 是离散非初等的,则 $|c| \geq 1$.

证明:由定理 4 有 $|c| = 0$ 或 $|c| \geq 1$,又因为 $\langle A, B \rangle$ 是非初等的,所以 $|c| \geq 1$.

定理 5 设 $A, B \in SL(\Gamma)$ 满足:

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

其中 $r > 1$,若 $\langle A, B \rangle$ 是离散非初等的,则

$$(r - r^{-1})^2(1 + |bc|) \geq 1 \quad (3)$$

证明:假定式(3)不成立,即

$$(r - r^{-1})^2(1 + |bc|) < 1 \quad (3a)$$

令

$$X_0 = B, B_{m+1} = B_m A B_m^{-1},$$

$$B_m = \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix}, m = 0, 1, \dots,$$

有

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= r a_m d_m^* - r^{-1} b_m c_m^*, \\ b_{m+1} &= (r^{-1} - r) a_m b_m^*, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} c_{m+1} &= -(r^{-1} - r) c_m d_m^*, \\ d_{m+1} &= r^{-1} d_m a_m^* - r c_m b_m^*, \end{aligned} \quad (5)$$

$$b_{m+1} c_{m+1}^* = -(r^{-1} - r)^2 (1 + b_m c_m^*) b_m c_m^*. \quad (6)$$

令 $f: [0, r] \rightarrow [0, r]$ 为

$$f(x) = x(1+x)(r^{-1} - r)^2, r = (r^{-1}r)^2 - 1 \quad (7)$$

显然 $f(x)$ 是增函数, $f(x) \leq x$ 且有二不动点 0 和 r , 这里 $x \in [0, r]$. 由(3a)有 $|bc| < r$.

由 $f(x)$ 的性质知

$$|b_{m+1} c_{m+1}^*| \leq f(|b_m c_m^*|) \leq \dots \leq f^{m+1}(|bc^*|),$$

所以

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m c_m^* = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} a_m d_m^* = 1.$$

又 $a_m d_m^* = d_m a_m^*$ 所以 $\lim_{m \rightarrow \infty} d_m a_m^* = 1$. 结合上面所得到的极限及等式(4), (5)得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = r, \lim_{m \rightarrow \infty} d_m = r^{-1}. \quad (8)$$

于是对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $m > M$ 时有

$$|a_m r^{-1}| < 1 + \varepsilon, \quad |d_m r| < 1 + \varepsilon.$$

又由假设知 $|r - r^{-1}| < 1$, 所以当取 ε 充分小时存在 $t \in [0, 1]$, 若 $m > M$ 则有

$$|a_m r^{-1}| \cdot |r - r^{-1}| \leq 1, |d_m r| \cdot |r - r^{-1}| \leq 1.$$

由式(4), (5)可得

$$|b_{m+1} r^{-(m+1)}| \leq t |b_m r^{-m}| = 0,$$

$$|c_{m+1} r^{m+1}| \leq t |c_m r^m|.$$

因此

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m r^{-m} = \lim_{m \rightarrow \infty} c_m r^m = 0, \lim_{m \rightarrow \infty} A^{-m} B_{2m} A^m = A$$

因 $\langle A, B \rangle$ 是离散的, 当 m 充分大时, $B_{2m} = A$, 于是 $B_{2m-1} A = A B_{2m-1}$, 即 B_{2m-1} 保持 A 的不动点集 $\{0, \infty\}$ 不变. 又 $B_{2m-2} B_{2m-1} = A B_{2m-2}^{-1}$, 所以 B_{2m-2} 保持 $\{0, \infty\}$ 不变. 重复这样讨论可知 $\{0, \infty\}$ 在 $B_i (i = 2m-1, 2m-2, \dots, 1, 0)$ 的作用下保持不变, 所以 $\langle A, B \rangle$ 有有限的轨道, 这与 $\langle A, B \rangle$ 有非初等矛盾.

参考文献:

- [1] Jørgensen T. On discrete groups of Möbius transformations[J]. Amer J Math, 1976, 98: 739 - 749.
- [2] Jørgensen T. A note on subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$ [J]. Quart J Math Oxford, 1977, 28: 209 - 212.
- [3] Cao C, Warterman P L. Conjugacy invariants of Möbius groups[M]. New York: Springer - Verlag, 1998.
- [4] Frunza M. Möbius transformations in infinite dimensions [J]. Rev Roumaine Math Pures Appl, 1991, 36: 369 - 376.
- [5] 李润兰, 王仙桃. 关于无穷维 Möbius 变换[J]. 黑龙江大学学报, 2005, 22(4): 497 - 500.