

J -拟次正交矩阵及其特例

刘 玉,陈桂章

(韩山师范学院 数学与信息技术系,广东 潮州 521041)

摘 要:参照拟次正交矩阵定义,给出了 J -拟次正交矩阵的概念,讨论了这类矩阵及其特例 J -(反)次正交矩阵的基本性质和它们的伴随矩阵、转置矩阵、次转置矩阵、行列式等的性质,并研究了这些矩阵之间的关系,得出了一些新的结果.

关键词: J -拟次正交矩阵; J -次正交矩阵; J -反次正交矩阵

中图分类号:O151.21

文献标识码:A

The J -quasi-sub-orthogonal Matrix and their Special Case

LIU Yu, CHEN Gui-zhang

(Department of Mathematics and Information Technology, Hanshan Normal University,
Chaozhou, Guangdong 521041, China)

Abstract: Referring to the methods of defining sub-orthogonal matrix, we give the concepts of J -quasi-sub-Orthomatrix and discuss the properties of the J -Anti-sub-orthogonal Matrix and the special cases of J -sub-orthogonal Matrix respectively. In the end, we present the relations among these generalized matrices and get some new results.

Key words: J -quasi-sub-orthogonal Matrix; J -sub-orthogonal Matrix; J -Anti-sub-orthogonal Matrix

0 引言

一般人们研究矩阵都是从其主对角线方向考虑问题,近些年来一些学者开始从其次对角线方向来研究矩阵,并取得了丰富的研究成果.这些理论也和其它矩阵理论一样在很多领域都有着广泛的应用.

关于次正交矩阵的概念是袁晖坪与王文惠在秦兆华次转置矩阵概念^[1]的基础上,于1998年分

别在文献[2]及文献[3]中提出来的.2004年陈琳在文献[4]中将次正交矩阵的概念加以推广,给出了亚次正交矩阵的概念.本文在以上概念和结果的基础上,给出了 J -拟次正交矩阵的概念,并讨论了这类矩阵及其特例 J -(反)次正交矩阵的基本性质和它的伴随矩阵、转置矩阵、次转置矩阵、行列式等的性质,研究了这些矩阵之间的关系,得出了一些新的结果.

收稿日期:2008-07-14

作者简介:刘 玉(1953-),男,黑龙江宾县人,韩山师范学院数学与信息技术系教授.主要研究方向:矩阵的理论及应用.

1 主要概念

这里采用文献[1]~文献[5]中的记号及定义,即用 A^* , A^T , A^{ST} , $\det A$ 分别表示 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵、转置矩阵、次转置矩阵和 A 的行列式;将满足 $A^{ST} = cA$ 的方阵 A 称为拟次对称矩阵,且当 $c = 1$ 时,称 A 为次对称矩阵,当 $c = -1$ 时,称 A 为反次对称矩阵;将满足 $AA^{ST} = A^{ST}A = cI$ ($c \neq 0$)的方阵 A 称为拟次正交矩阵,且当 $c = 1$ 时称 A 为次正交矩阵,当 $c = -1$ 时,称 A 为反次正交矩阵;用 I, J 分别表示单位矩阵和次单位矩阵;用 $R^{m \times n}$ 表示 m 行 n 列实矩阵的全体,若无特殊说明,本文所提的矩阵 A 均指当 $4 \mid n$ 或 $4 \mid n-1$ 时(n 为正整数)的 n 阶实矩阵.

可以得出^[2]:若 $A \in R^{m \times n}$,则 $J_n A^{ST} J_m = A^T$, $J_n A^T J_m = A^{ST}$, $(A^{ST})^{ST} = A$; $(A+B)^{ST} = A^{ST} + B^{ST}$, $(cA)^{ST} = cA^{ST}$ (c 为常数),易得 $J^{-1} = J^T = J^{ST} = J$, $J^2 = I$, $\det A = \det A^{ST}$, $(A^{ST})^{-1} = (A^{-1})^{ST}$, $\det J = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

定义1 设 $A \in R^{n \times n}$,若 $AA^{ST} = A^{ST}A = cJ$ ($c \neq 0$),则称 A 为 J -拟次正交矩阵;当 $c = 1$ 时,称 A 为 J -次正交矩阵;当 $c = -1$ 时,称 A 为 J -反次正交矩阵.

容易看出,若 A 是 J -拟次正交矩阵,则 A 可逆,且 $A^{-1} = \frac{1}{c}JA^{ST}$ ($c \neq 0$),特别地,当 A 为 J -次正交矩阵时, $A^{-1} = JA^{ST}$;当 A 为 J -反次正交矩阵时, $A^{-1} = -JA^{ST}$.

2 主要结论及证明

定理2 设 $A \in R^{n \times n}$, $0 \neq c \in R$,则下列三个条件是等价的.

- (i) A 是 J -拟次正交矩阵;
- (ii) $AJ = JA$,且 $AA^{ST} = cJ$ ($A^{ST}A = cJ$);
- (iii) $AJA^{ST} = A^{ST}JA = cI$.

证明 (1) (i) $\Rightarrow$ (ii), 若 A 是 J -拟次正交矩阵,则 $AA^{ST} = A^{ST}A = cJ$, $AJ = A(\frac{1}{c}A^{ST}A) = \frac{1}{c}(AA^{ST})A = \frac{1}{c}(cJ)A = JA$,且 $AA^{ST} = cJ$ ($A^{ST}A = cJ$).

(2) (ii) $\Rightarrow$ (iii), 若 $AJ = JA$ 且 $AA^{ST} = cJ$,则 $A = JAJ$,从而 $AJA^{ST} = cI$;同理若(ii)成立,也可得 $A^{ST}JA = cI$,故(iii)成立.

(3) (iii) $\Rightarrow$ (i), 若 $AJA^{ST} = A^{ST}JA = cI$,

$JAA^{ST} = A^{ST}AJ = cJ^2 = cI$,两边左(右)乘 J 得 $AA^{ST} = A^{ST}A = cJ$,故(i)成立.

推论3 设 $A \in R^{n \times n}$,则下列三个条件是等价的

- (i) A 是 J -次正交矩阵;
- (ii) $AJ = JA$ 且 $AA^{ST} = J(A^{ST}A = J)$;
- (iii) $AJA^{ST} = A^{ST}JA = I$.

推论4 设 $A \in R^{n \times n}$,则下列三个条件是等价的

- (i) A 是 J -反次正交矩阵;
- (ii) $AJ = JA$ 且 $AA^{ST} = -J(A^{ST}A = -J)$;
- (iii) $AJA^{ST} = A^{ST}JA = -I$.

定理5 设 $A \in R^{n \times n}$,若 A 是 J -拟次正交矩阵,即 $AA^{ST} = A^{ST}A = cJ$ ($c \neq 0$),则

- (i) $(\det A)^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c^n$;
- (ii) A^{ST}, A^T, A^{-1}, aA ($a \neq 0$), A^* 都是 J -拟次正交矩阵;
- (iii) J 与 A^{ST}, A^T, A^{-1}, aA ($a \neq 0$), A^* 均可交换.

证明 若 A 是 J -拟次正交矩阵,即 $AA^{ST} = A^{ST}A = cJ$ ($c \neq 0$),

(i) $(\det A)^2 = (\det A)(\det A^{ST}) = \det(AA^{ST}) = \det(cJ) = c^n \det J = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c^n$.

(ii) $(A^{ST})(A^{ST})^{ST} = A^{ST}A = cJ$,同理 $(A^{ST})^{ST}A^{ST} = AA^{ST} = cJ$,即 A^{ST} 是 J -拟次正交矩阵.

类似可证出 aA, A^T, A^{-1}, A^* 都是 J -拟次正交矩阵.

(iii) 只证 $A^{ST}J = \frac{1}{c}A^{ST}(AA^{ST}) = \frac{1}{c}(A^{ST}A)A^{ST} = \frac{1}{c}(cJ)A^{ST} = JA^{ST}$,其余类似可得.

推论6 设 $A \in R^{n \times n}$, $0 \neq a \in R$,若 A 是 J -次正交矩阵,则

- (i) $\det A = 1$;
- (ii) $A^{ST}A^T, A^{-1}, A^*$ 都是 J -次正交矩阵; A^* 是拟 J -次正交矩阵
- (iii) aA 是 J -次正交矩阵的充要条件是 $a = \pm 1$.

推论7 设 $A \in R^{2n \times 2n}$,若 A 是 J -反次正交矩阵,则

- (i) $\det A = \pm 1$;
- (ii) $A^{ST}A^T, A^{-1}$ 是 J -反次正交矩阵; A^* 是 J -拟正交矩阵;

(iii) aA 是 J -反次正交矩阵的充要条件是 $a = \pm 1$.

定理 8 设 $A_1, A_2, \dots, A_m \in R^{2n \times 2n}$, 且都是 J -拟次正交矩阵, 则

(i) 当 $m = 2k$ 时, $\prod_{i=1}^m A_i$ 为拟次正交矩阵;

(ii) 当 $m = 2k + 1$ 时, $\prod_{i=1}^m A_i$ 为 J -拟次正交矩阵. ($k = 1, 2, \dots$)

证明 若 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 都是 J -拟次正交矩阵, 则存在 $c_i \in R (i = 1, 2, \dots, m)$

使得 $A_i A_i^{\text{ST}} = A_i^{\text{ST}} A_i = c_i J (i = 1, 2, \dots, m)$, 而

$$\left(\prod_{i=1}^m A_i\right)^{\text{ST}} \left(\prod_{i=1}^m A_i\right) = \left(\prod_{i=1}^m A_i\right) \left(\prod_{i=1}^m A_i\right)^{\text{ST}} = \left(\prod_{i=1}^m A_i\right) \left(\prod_{i=1}^m A_{m-i+1}^{\text{ST}}\right) = \left(\prod_{i=1}^m c_i\right) J^m$$

(i) 当 $m = 2k$ 时, $J^m = I$, 则 $\prod_{i=1}^m A_i$ 为拟次正交矩阵;

(ii) 当 $m = 2k + 1$ 时, $J^m = J$, 则 $\prod_{i=1}^m A_i$ 为 J -拟次正交矩阵.

推论 9 设 $A \in R^{2n \times 2n}$, 若 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 都是 J -次正交矩阵, 则

(i) 当 $m = 2k$ 时, 则 $\prod_{i=1}^m A_i$ 为次正交矩阵;

(ii) 当 $m = 2k + 1$ 时, 则 $\prod_{i=1}^m A_i$ 为 J -次正交矩阵. ($k = 1, 2, \dots$).

推论 10 设 $A \in R^{2n \times 2n}$, 若 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 都是 J -反次正交矩阵, 则

(i) 当 $m = 2k$ 时, 则 $\prod_{i=1}^m A_i$ 为次正交矩阵;

(ii) 当 $m = 2k + 1$ 时, 则 $\prod_{i=1}^m A_i$ 为 J -反次正交矩阵. ($k = 1, 2, \dots$).

定理 11 设 $A, B \in R^{2n \times 2n}$, 若 A, B 都是 J -拟次正交矩阵, 则

(i) $B^{\text{ST}} A B, B A B^{\text{ST}};$

(ii) $B^{-1} A B, B A B^{-1};$

(iii) $B^{\text{T}} A B, B A B^{\text{T}};$

(iv) $B^* A B, B A B^*$ 都是 J -拟次正交矩阵.

证明 若 A, B 都是 J -拟次正交矩阵, $A A^{\text{ST}} = A^{\text{ST}} A = c_1 J, B B^{\text{ST}} = B^{\text{ST}} B = c_2 J (c_1 c_2 \neq 0)$,

$$(i) (B^{\text{ST}} A B) (B^{\text{ST}} A B)^{\text{ST}} = B^{\text{ST}} A B B^{\text{ST}} A^{\text{ST}} B =$$

$$c_1 c_2 J^3 = c_1 c_2 J,$$

类似可得 $(B^{\text{ST}} A B)^{\text{ST}} (B^{\text{ST}} A B) = c_1 c_2 J$, 故 $B^{\text{ST}} A B$ 是 J -拟次正交矩阵. 同理可证 $B A B^{\text{ST}}$ 也是 J -拟次正交矩阵. (ii)、(iii)、(iv) 的证明与 (i) 类似.

推论 12 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 若 A, B 都是 J -次正交矩阵, 则

(i) $B^{\text{ST}} A B, B A B^{\text{ST}};$

(ii) $B^{-1} A B, B A B^{-1};$

(iii) $B^{\text{T}} A B, B A B^{\text{T}};$ 都是 J -次正交矩阵;

(iv) $B^* A B, B A B^*$ 是 J -拟次正交矩阵.

推论 13 设 $A, B \in R^{n \times n}$, 若 A, B 都是 J -反次正交矩阵, 则

(i) $B^{\text{ST}} A B, B A B^{\text{ST}};$

(ii) $B^{-1} A B, B A B^{-1};$

(iii) $B^{\text{T}} A B, B A B^{\text{T}};$ 都是 J -反次正交矩阵

(iv) $B^* A B, B A B^*$ 是 J -拟次正交矩阵.

定理 14 设 $A \in R^{n \times n}$, a, b 都是非零常数, 若下列三个条件中的任意二个成立, 则第三个一定成立.

(i) A 是 J -拟次正交矩阵 ($A A^{\text{ST}} = A^{\text{ST}} A = aJ$);

(ii) A 是拟次对称矩阵 ($A^{\text{ST}} = bA$);

$$(iii) A^2 = \frac{a}{b} J.$$

证明 (1) 由 (i), (ii) $\Rightarrow$ (iii). 若 (i), (ii) 成立, 则 $A A^{\text{ST}} = A^{\text{ST}} A = aJ$, 且 $A^{\text{ST}} = bA$, 从而 $A^2 = \frac{a}{b} J$, 故 (iii) 成立.

(2) 由 (i), (iii) $\Rightarrow$ (ii). 若 (i), (iii) 成立, 则 $A A^{\text{ST}} = A^{\text{ST}} A = aJ$, 且 $A^2 = \frac{a}{b} J$, 从而 $A A^{\text{ST}} = bA^2$, 又因 A 是可逆矩阵, 两边同时左乘 A^{-1} 得 $A^{\text{ST}} = bA$, 故 (ii) 成立.

(3) 由 (ii), (iii) $\Rightarrow$ (i). 若 (ii), (iii) 成立, 则 $A^{\text{ST}} = bA$, 且 $A^2 = \frac{a}{b} J$, 从而 $A A^{\text{ST}} = aJ$, 及 $A^{\text{ST}} A = aJ$, 故 (i) 成立.

推论 15 设 $A \in R^{n \times n}$, 若下列三个条件中的任意两个成立, 则第三个一定成立.

(i) A 是 J -次正交矩阵; (ii) A 是次对称矩阵 ($A^{\text{ST}} = A$); (iii) $A^2 = J$.

推论 16 设 $A \in R^{n \times n}$, 若下列三个条件中的任何两个成立, 则第三个一定成立.

(下转第 45 页)

梁加固边坡的原因所在. 另外,从图中可看出应变观察值的离散程度较大,这可能主要是边坡岩体受温度影响所致,因为每天两次观察是在早上和下午进行的,两次观察环境温差平均高达 12°C ,所以环境气温对观察数据造成了一定程度上的影响,但这对应变沿不同深度的分布趋势并不造成较大影响.

现场试验结果说明了锚索施加预应力后岩体中的应力分布的正确性. 以此证明了预应力锚索-地梁在岩体边坡加固中的有效性.

4 结论

1) 在对锚索施加预应力后,锚索预应力通过地梁传递给被加固的边坡岩土体,其传递方式在垂直于地梁轴线的平面内,是以梁轴线与该平面的交点为端点的近似椭圆的等值面形式由内向外呈逐渐衰减趋势分布的.

2) 实验得出:预应力锚索-地梁周边岩体中的压应变随深度增加由小到大增至峰值,然后逐渐衰减为 0,这种分布形式使预应力锚索-地梁在岩土体中成为可靠的加固处理技术.

3) 施加了预应力锚索地梁加固,但是坡面上一定范围内和深度内仍然存在拉应变,可能造成浅层岩土体滑移或坍塌,在应用预应力锚索-地梁加固技术时应引起重视.

参考文献:

- [1] 丁秀丽,盛 谦,韩 军,等. 预应力锚索锚固机制的数值模拟试验研究[J]. 岩石力学与工程学报,2002,21(7):980-988.
- [2] 夏 雄,周德培. Winkler 弹性地基上预应力锚索地梁内力的计算方法[J]. 线路/路基,2005(1):46-48.
- [3] 李德芳,张友良,陈从新,等. 边坡加固中预应力锚索地梁内力计算[J]. 岩土力学,2000,21(2):170-172.
- [4] 宋从军,周德培,肖世国,等. 预应力锚索地梁在边坡加固中的应用实例[J]. 岩土力学,2002,23(2):242-245.
- [5] Nakayama M, Beaudoin B B. A novel technique determining bond strength developed between cement paste and steel[J]. Cement and Concrete Research,1987,22(3):478-488.
- [6] 吕 庆,孙红月,尚岳全,等. 预应力锚索框格梁体系加固破碎岩质边坡合理问题研究[J]. 岩石力学与工程学报,2006,25(1):136-140.
- [7] 张端良,董燕军,唐乐人,等. 预应力锚索锚固端周边剪应力分布特性的弹性理论分析[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(2):4735-4738.
- [8] 周桂云,李同春,金鹏飞. 裂隙岩体边坡稳定性的渗流与应力耦合分析[J]. 水利水电科技进展,2006,26(5):22-25.
- [9] 张强勇,张绪涛. 雾化雨入渗影响下的岩体边坡稳定性分析方法及其应用[J]. 岩土工程学报,2007,29(10):1572-1576.

(上接第 39 页)

(i) A 是 J -反次正交矩阵;(ii) A 是次对称矩阵($A^{\text{ST}} = A$);(iii) $A^2 = -J$.

推论 17 设 $A \in R^{n \times n}$,若下列三个条件中的任何两个成立,则第三个一定成立.

(i) A 是 J -次正交矩阵;(ii) A 是反次对称矩阵($A^{\text{ST}} = -A$);(iii) $A^2 = -J$.

推论 18 设 $A \in R^{n \times n}$,若下列三个条件中的任意二个成立,则第三个一定成立.

(i) A 是 J -反次正交矩阵;(ii) A 是反次对称矩阵($A^{\text{ST}} = -A$);(iii) $A^2 = J$.

参考文献:

- [1] 秦兆华. 关于次对称矩阵与反次对称矩阵[J]. 西南师范学院学报(自然科学版),1985,10(1):100-110.
- [2] 袁晖坪,张 勇,黄永忠. 次正交矩阵与次合同矩阵[J]. 渝州大学学报(自然科学版),1998,15(1):5-9.
- [3] 王文惠. 关于次正交矩阵[J]. 渝州大学学报(自然科学版),1998,15(2):11-15.
- [4] 陈 琳. 亚次正交矩阵及其性质[J]. 同口师范学院学报,2004,21(5):28-30.
- [5] 袁晖坪. 准正交矩阵与准对称矩阵[J]. 工程数学学报,2004,21(4):642-644.
- [6] 陈景良,陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京:清华大学出版社,2001.