文章编号:1673-0062(2008)03-0026-03

Noether 环上的 Gorenstein 合冲模

黄宠辉,谭 良,蔡秋娥

(南华大学 数理学院,湖南 衡阳 421001)

摘 要:引入了 Gorenstein 合冲模,给出了 Gorenstein 合冲模类和挠自由模类重合的等价刻画.

关键词:Gorenstein 合冲模;挠自由模;Noether 环

中图分类号:O153.3 **文献标识码**:A

Gorenstein Syzygy Modules over Noether Rings

HUANG Chong-hui, TAN Liang, CAI Qiu-er

(School of Mathematics and Physics Science, University of South China, Hengyang, Hunan 421001, China)

Abstract: In this paper, we first introduce the notion of Gorenstein k - syzygy modules, then give an equivalent characterization that the class of Gorenstein k - syzygy modules concides with that of ttorsionfree modules.

Key words: Gorenstein k - syzygy module; k - torsionfree module; Noether rings

本文的主要研究动机来源于 Noether 环上的 k - Gorenstein 理论在文献[1-2]中,文中用合冲模类的性质给出了 k - Gorenstein 环的一个等价刻画. 之后,又有了许多很有意思的推广(详见[3-5]等). 在文献[6]中,Huang 和 Iyama 指出了在 Auslander 型环类中,合冲模类具有良好的性质. 并且,众所周知,对于任意正整数 n 合冲模类 $\Omega^n(\mathrm{mod}\ R)$ 都是函子有限的. 因此,研究 Gorenstein 合冲模是有意义的.

另一方面,容易验证 $T^k(\mathrm{mod}\ R) \subset \Omega^k(\mathrm{mod}\ R) \subset G-\Omega^k(\mathrm{mod}\ R)$. 因此,研究它们之间何时重合也是一件非常有意思的工作.

本文中,总假设 R 是左-右 Noether 环,mod R(或 mod R^{op}) 表示由有限生成左 R 模(或 R 模)组成的模范畴. 除非特别申明,本文所考虑的模均是有限生成的. 对于一个左(或右) R 模 M,设 $\sigma_M: M \to M^{**}$ 的典范同态,如果 σ_M 是单态射(或同构),M 就称作是无挠的(或自反的). 易知所有的投射模都是自反的.

文献[7]中引入了模级数和强级数的概念. 设 $A \in \mathrm{mod}\ R$ 且 i 是非负整数. 如果对任意 $0 \leqslant j < i$ 有 $\mathrm{Ext}^j(A,R)=0$,则称模 A 相的级数不小于 i,记作 gr $A \geqslant i$. 如果对 A 的任意子模 B 都有 gr $B \geqslant i$ 则称 A 的强级数不小于 i,记作 s. gr $A \geqslant i$. 模 $M \in \mathrm{mod}\ R$(或 $M \in \mathrm{mod}\ R^{op}$) 被称为 Gorenstein 投射的(简称 G-投射),如果对任意 $i \geqslant 1$ 有

收稿日期:2008-07-10
基金项目:湖南省优秀青年基金资助项目(06B080)
作者简介:黄宠辉(1978-),男,湖南资兴人,南华大学数理学院讲师,硕士. 主要研究方向:代数学.

$\mathrm{Ext}^i(M,R)=0=\mathrm{Ext}^i(M^*,R)$ 并且 M 是自反的.

文献[7] 中引入了合冲模和挠自由模的概念，并且利用它们的性质得出了很好的结果. 下面引入 Gorenstein 合冲模的概念.

定义 1　设 A 是一个有限生成左 A 模且 n 是正整数. 如果存在正合列 $0\to A\to X_0\to X_1\to\cdots\to X_{n-1}$，其中所有的 X_i 都是 G－投射的，则称 A 是一个 n－Gorenstein 合冲模. 用 $G-\Omega^n(\mathrm{mod}\,R)$ 对应地 $\Omega^n(\mathrm{mod}\,R)$，$T^n(\mathrm{mod}\,R)$）表示由全体 n－Gorenstein 合冲模（对应地 n－合冲模，n－挠自由模）组成的全子范畴. 对偶地，可以定义有限生成右模范畴中的 n－合冲模和 $\Omega^n(\mathrm{mod}\,R^{op})$（对应地 $\Omega^n(\mathrm{mod}\,R^{op})$，$T^n(\mathrm{mod}\,R^{op})$.

注：如果上述定义中的所有 X_i 都是投射模，则 n－Gorenstein 合冲模就是 n－合冲模.

引理 2[3]　设有 $\mathrm{mod}\,R$（或 $\mathrm{mod}\,R^{op}$）中的正合列 $0\to A\to H\xrightarrow{f}B$，若其中 H 是自反的而 B 是无挠的，则 $A\cong(\mathrm{Coker}\,f^*)^*$.

引理 3　下列陈述等价：

(1) $M\in\Omega^2(\mathrm{mod}\,R)$；

(2) $M\in G-\Omega^2(\mathrm{mod}\,R)$；

(3) 存在 $N\in\mathrm{mod}\,R^{op}$ 使得 $M\cong N^*$.

证：(1)⇒(2) 是显然的，由引理 2 易知 (2)⇒(3).

(3)⇒(1) 设有 $N\in\mathrm{mod}\,R^{op}$ 使得 $M\cong N^*$. 在 $\mathrm{mod}\,R^{op}$ 中作 N 的投射分解 $Q_1\to Q_0\to N\to 0$，易得正合列 $0\to N^*\to Q_0^*\to Q_1^*$，其中 Q_0^*,Q_1^* 是投射的而 $M(\cong N^*)\in\Omega^2(\mathrm{mod}\,R)$.

由 k－挠自由模的定义，容易得到如下结论.

引理 4　设 $k\geqslant 3$. 则 $\mathrm{mod}\,R$ 中自反模 A 是 k－挠自由的，当且仅当对任意 $1\leqslant i\leqslant k-2$，$\mathrm{Ext}^i(A^*,R)=0$.

设 $A\in\mathrm{mod}\,R$（或 $\mathrm{mod}\,R^{op}$），$X_1\xrightarrow{f}X_0\to A\to 0$ 是 $\mathrm{mod}\,R$ 中的一个正合列，其中 X_0 和 X_1 都是 G－投射的. 令 $X=\mathrm{Coker}\,f^*$，则我们可得到 $\mathrm{mod}\,R^{op}$（或 $\mathrm{mod}\,R$）中的正合列

$$0\to A^*\to X_0^*\xrightarrow{f^*}X_1^*\to X\to 0$$

命题 5　设 A 和 X 如上所述. 则有如下的正合列：

$$0\to\mathrm{Ext}^1(X,R)\to A\xrightarrow{\sigma_A}A^{**}\to\mathrm{Ext}^2(X,R)\to 0$$

$$0\to\mathrm{Ext}^1(A,R)\to X\xrightarrow{\sigma_X}X^{**}\to\mathrm{Ext}^2(A,R)\to 0.$$

证：由 G－投射的性质易知存在投射模 P_1,P_2 以及 G－投射模 G_1,G_2 和 R－模同态 $g:P_1\to P_2$，使得如下的正合交换图成立：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,g \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}\,f \arrow[r] \arrow[d] & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

用函子 $\mathrm{Hom}(\ ,R)$ 作用后，由蛇形引理得到正合列 $0\to\mathrm{Coker}\,f^*\to\mathrm{Coker}\,g^*\to G^*\to 0$. 从而对于任意的 $i\geqslant 1$ 有 $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Coker}\,f^*,R)\cong\mathrm{Ext}^i(\mathrm{Coker}\,g^*,R)$. 再由文献[7]，得到了如下正合列

$$0\to\mathrm{Ext}^1(X,R)\to A\xrightarrow{\sigma_A}A^{**}\to\mathrm{Ext}^2(X,R)\to 0$$

第二个正合列可以由 $A\cong\mathrm{Coker}\,f^{**}$ 和第一个正合列得出.

注：1) 这个命题不是平凡的. 因为任意一个投射模和 G－投射模的直和都是 G－投射的，而且非投射的 G－投射是存在的.

2) 易见：有限生成左（或右）R－模是无挠的（或自反的）当且仅当它是 1－挠自由的（1－挠自由的）.

定理 6　下列陈述等价：

(1) 对任意 $M\in\mathrm{mod}\,R$ 和 $1\leqslant i\leqslant k-1$，$\mathrm{grExt}^{i+1}(M,R)\geqslant i$；

(2) 对任意 $1\leqslant i\leqslant k$，$G-\Omega^i(\mathrm{mod}\,R)=T^i(\mathrm{mod}\,R)$.

证：对 k 作数学归纳法. 由命题 5，有 $G-\Omega^1(\mathrm{mod}\,R)=T^1(\mathrm{mod}\,R)$. 于是，$\Omega^1(\mathrm{mod}\,R)=T^1(\mathrm{mod}\,R)$. 另外，当 $k=1$ 时，(1) 中的集是空集，因此结论显然是对的. 由引理 3 和文献[4] 知，$k=2$ 时结论成立. 现在假设 $k\geqslant 3$.

(1)⇒(2) 首先，$T^k(\mathrm{mod}\,R)\subset G-\Omega^k(\mathrm{mod}\,R)$，所以只需证明 $T^k(\mathrm{mod}\,R)\supset G-\Omega^k(\mathrm{mod}\,R)$ 即可.

任取 $L\in G-\Omega^k(\mathrm{mod}\,R)$. 于是有 $\mathrm{mod}\,R$ 中的正合列 $0\to L\to X_{k-1}\xrightarrow{f}X_{k-2}\to\cdots\to X_0\to M\to 0$，其中所有的 X_i 都是 G－投射的. 由题设已有 k 时(1) 成立，从而 $k-1$ 时(1) 也成立，由归纳假设，对于任意 $1\leqslant i\leqslant k-1$ 有 $G-\Omega^i(\mathrm{mod}\,R)=T^i(\mathrm{mod}\,R)$. 因此 $L\in T^{k-1}(\mathrm{mod}\,R)$. 由前面的引理 4 和归纳法，只需证明 $\mathrm{Ext}^{k-2}(L^*,R)=0$.

令 $K = \mathrm{Coker}f$,则有 $K \in T^{k-1}(\mathrm{mod}\ R)$. 可得如下正合列

$0 \to K^* \to X_{K-1}^* \to L^* \to \mathrm{Ext}^k(M,R) \to 0.$

$K \in T^{k-1}(\mathrm{mod}\ R)$ 可推出对于任意 $1 \leqslant i \leqslant k-3$ 有 $\mathrm{Ext}^i(K^*,R) = 0$. 又由 (1) 和正合列 $\mathrm{Ext}^{k-2}(\mathrm{Ext}^k(M,R)R) \to \mathrm{Ext}^{k-2}(L^*,R) \to \mathrm{Ext}^{k-3}(K^*,R)$ 得证.

(2)⇒(1) 任取 $M \in \mathrm{mod}\ R$,则有 mod R 中正合列 $0 \to L \to X_{k-1} \xrightarrow{f} P_{k-2} \to \cdots \to X_0 \to M \to 0$,其中 X_i 都是 G - 投射的. 由(2) 知 $L \in T^k(\mathrm{mod}\ R)$. 由归纳假设,对任意 $1 \leqslant i \leqslant k-2$ 有 $\mathrm{grExt}^{i+1}(M,R) \geqslant i$. 于是只需证明 $\mathrm{grExt}^k(M,R) \geqslant k-1$,取 $K = \mathrm{Coker}f$. 从(1)⇒(2) 的证明可得如下两个正合列:

$0 \to K^* \to X_{k-1}^* \to L^* \to \mathrm{Ext}^k(M,R) \to 0$, and

$\mathrm{Ext}^{k-4}(K^*,R) \to \mathrm{Ext}^{k-2}(\mathrm{Ext}^k(M,R),R) \to \mathrm{Ext}^{k-2}(L^*,R)$.

再由引理 4 可知 $\mathrm{Ext}^{k-2}(\mathrm{Ext}^k(M,R),R) = 0$.

容易看出,mod R 中的 1 - Gorenstein 合冲模都属于 $\Omega^1(\mathrm{mod}\ R)$. 但不知道是否任意 k - Gorenstein 合冲模都会属于 $\Omega^k(\mathrm{mod}\ R)$. 作为定理 6 的推论,得到下面的结论.

推论 7 如果对任意 $M \in \mathrm{mod}\ R$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $\mathrm{grExt}^{i+1}(M,R) \geqslant i$. 则对任意 $1 \leqslant t \leqslant k$,任一 mod R 中的 t - Gorenstein 合冲模都属于 $\Omega^t(\mathrm{mod}\ R)$. 也即是说:mod R 中,若有正合列 $0 \to K \to X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_{t-1}$,其中每一个 X_i 是 G - 投射的,则存在这样一个正合列 $0 \to K \to P_0 \to P_1 \to \cdots \to P_{t-1}$,其中每一个 P_i 都是投射的.

证:假如对任意 $M \in \mathrm{mod}\ R$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k-1$, $\mathrm{grExt}^{i+1}(M,R) \geqslant i$. 由定理6对任意 $1 \leqslant t \leqslant k$, t - Gorenstein 合冲模 K 都属于 $T^t(\mathrm{mod}\ R)$. 另一方面,由文献[7], $\Omega^t(\mathrm{mod}\ R) \supset T^t(\mathrm{mod}\ R)$. 所以 $K \in \Omega^t(\mathrm{mod}\ R)$.

下面的结论指出定理 6 是左右对称的.

定理 8 对任意正整数 k,下列陈述等价:

(1) 对任意 $M \in \mathrm{mod}\ R$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k-1$ 有 $\mathrm{gr\,Ext}^{i+1}(M,R) \geqslant i$;

(2) 对任意 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $G - \Omega^i(\mathrm{mod}\ R) = T^i(\mathrm{mod}\ R)$;

(3) 对任意 $N \in \mathrm{mod}\ R^{op}$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k-1$ 有 $\mathrm{gr\,Ext}^{i+1}(N,R) \geqslant i$;

(4) 对任意 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $G - \Omega^i(\mathrm{mod}\ R^{op}) = T^i(\mathrm{mod}\ R^{op})$.

证:由文献[4],可得(1)⇔(3),再由定理 6 得证.

容易看出 $\Omega^1(\mathrm{mod}\ R) = G - \Omega^1(\mathrm{mod}\ R)$. 另一方面,由引理3 可得 $\Omega^2(\mathrm{mod}\ R) = G - \Omega^2(\mathrm{mod}\ R)$. 但是一般地对于任意整数 $k \geqslant 3$,不知道是否有 $\Omega^k(\mathrm{mod}\ R) = G - \Omega^k(\mathrm{mod}\ R)$. 很自然地:什么时候 $\Omega^k(\mathrm{mod}\ R) = G - \Omega^k(\mathrm{mod}\ R)$?下面的推论给出了一个部分回答.

推论 9 如果对任意 $M \in \mathrm{mod}\ R$ 和 $1 \leqslant i \leqslant k-1$ 有 $\mathrm{grExt}^{i+1}(M,R) \geqslant i$,则对任意 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $G - \Omega^i(\mathrm{mod}\ R) = \Omega^i(\mathrm{mod}\ R) = T^i(\mathrm{mod}\ R)$.

参考文献:

[1] Auslander M, Reiten I. k - Gorenstein Algebras and Syzygy Modules[J]. Pure and Appl. Alg., 1994, 92(1): 1-27.

[2] Auslander M, Reiten I. Syzygy Modules for Noetherian Rings[J]. Alg., 1996, 183(1): 167-185.

[3] Huang Z Y. On a Generalization of the Auslander - Bridger Transpose[J]. Pure Appl. Algebra, 2001, 161(12): 167-176.

[4] Huang Z Y, Extension Closure of Relative Syzygy Modules[J]. Sci China(Ser. A), 2003, 46(5): 611-620.

[5] Huang C H, Huang Z Y. On Generalization Syzygy Modules[J]. Sci. China(Ser. A), 2007, 50(5): 675-682.

[6] Zhaoyong Huang, Iyama O, Auslander - type Conditions and Cotorsion Pairs[J]. Al - gebra, 2007, 318(1): 93-110.

[7] Auslander M, Bridger M. Stable Module Theory[M]. Memoirs Amer Math Soc, Providence: American Mathematical Society, 1969.