基于 Lévy 过程的一篮子期权定价研究

邱　虹
(天津科技大学 经济与管理学院,天津 300222)

[摘　要]　文章充分考虑了带跳金融市场的实际特征,因为 Lévy 过程能准确地刻画股票市场的运动,故引入 Lévy 过程构建一篮子期权定价模型,通过三阶矩匹配的方法获得一篮子期权的近似分布。最后通过指数挂钩担保投资凭证中 7 支股票指数组成的一篮子期权对经典 Black-Scholes 模型与 3 类 Lévy 过程定价结果进行比较。结果体现了 Lévy 过程在带跳的金融市场下,对一篮子期权定价的优越性。

[关键词]　Lévy 过程;　一篮子期权;　期权定价
[中图分类号]　F224　[文献标识码]　A　　[文章编号]　1673-0755(2017)01-0069-05

一篮子期权(basket option)是 20 世纪 80 年代末出现的一种奇异期权(exotic option)。其基本特点是:在期权进行结算时,其结算额不是由某一种标的资产的价格决定,而是由多种标的资产的平均价格与执行价格之间的差额来确定。由于投资组合中的大部分资产都是高度相关的,简单地检验单个资产或者单个金融衍生品的风险显得非常不经济。正因为一篮子期权把一篮子资产看作一个整体的这一独特性质,减少了基金经理用于监视篮子中每个单独资产的工作量,同时大大降低了交易成本,因此一篮子期权是一种很好对冲风险的工具。但由于其资产间复杂的相依结构,使一篮子期权在定价效率和精度上仍存在很大困难。

在经典的 Black-Scholes 期权定价模型中,资产假定服从几何布朗运动[1]。但实证分析表明,正态分布作为市场价格变化模型存在缺陷,资产收益率服从非正态分布,存在跳跃,呈现尖峰厚尾非高斯的特征。在短时间尺度内这些现象更加明显。这就使得 Black-Scholes 定价模型在一篮子期权定价方面存在局限性[2]。

近年来,带跳的 Lévy 过程得到迅速发展。由于 Lévy 过程是一类无限可分的左极限右连续的随机过程,更能准确地描述资产收益率,因此 Lévy 过程越来越多地应用在期权定价中,来弥补经典的 Black-Scholes 模型的缺陷[3-4]。本文在 Lévy 市场下对一篮子期权进行定价,这是一种更符合真实金融市场的定价方法。

一　Lévy 市场

定义:一个定义在概率空间(Ω,F,P)上,取值 $\boldsymbol{R}^d$ 的随机过程$(X_t)_{t\geqslant 0}$,满足 $X_0=0$。如果它还满足如下条件:

(1)独立增量:对每一个时间序列 $t_0,t_1,\cdots,t_n$,随机变量 $X_{t_0},X_{t_1}-X_{t_0},\cdots,X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$是独立的,即与历史信息集没有关系。

(2)平稳增量:对于每一个 $h>0$,$X_{t+h}-X_t$ 的分布律不依赖于 t。也就是说,增量服从同样的分布。

(3)随机连续性:对于每一个 $t\geqslant 0,\varepsilon>0$,$\lim_{s\to t}P[|X(s)-X(t)|>\varepsilon]=0$;

(4)存在 $\Omega_0\in F,P(\Omega_0)=1$,对于每一个 $\omega\in\Omega_0$,当 $t\geqslant 0,X(t)$是右连续;$t>0$ 是左极限。

那么它就被称为 Lévy 过程。

每个 Lévy 过程都可以表示成一个确定性漂移项、一个布朗运动和一个独立于布朗运动的纯跳跃过程的和。如果每个有限间隔中的跳跃次数是有限的,则纯跳跃项是一个复合泊松过程。超越跳跃扩散过程的唯一方法就是考虑在有限时间间隔里有无限次跳跃的过程。事实上,金融资产定价模型通常使用纯跳跃过程,即没有布朗运动项的 Lévy 过程[5]。

一个具有非降抽样路径的 Lévy 过程称为一个从属过程。Lévy 过程的一个大类(有时称为类型 G 过程)可以表示为 $W(G(t))$,其中 W 为布朗运动,而 G 为独立于 W 的从属过程。

假定 $\phi(u)$是分布的特征函数,累积特征函数

[收稿日期]　2016-10-21
[作者简介]　邱虹(1991-),女,天津人,天津科技大学经济与管理学院博士研究生。

$\psi(u)=\log\phi(u)$被称为特征指数,满足下面的 Lévy-Khintchine 公式:

$$\psi(u)=i\gamma u-\frac{\sigma^2}{2}u^2+\int_{-\infty}^{+\infty}(\exp(iux)-1-iux1_{\{|x|<1\}})v(\mathrm{d}x),$$

其中 $\gamma\in\boldsymbol{R},\sigma^2\geqslant 0,v$ 是 $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ 上的测度,并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\inf\{1,x^2\}v(\mathrm{d}x)=\int_{-\infty}^{+\infty}(1\wedge x^2)v(\mathrm{d}x)<\infty$$

无限可分分布有 Lévy 特征三元组$[\gamma,\sigma^2,v(\mathrm{d}x)]$。测度 v 被称为 X 的 Lévy 测度[6]。

众所周知,Lévy 过程下的风险中性鞅测度不是独立的,因此市场是不完备的。在一个不完备市场中,一些风险不能完全对冲。我们选择等价鞅测度 Q,在由定价过程为 $B_t=\exp(rt)$的无风险资产(债券)和无分红支付的风险资产(股票或是指数)组成的市场。风险资产模型由下式给出

$$S_t=S_0\exp(X_t)$$

其中 $X=\{X_t,t\geqslant 0\}$是测度 Q 下的 Lévy 过程。在风险中性环境下,离散的股票价格为鞅,那么

$$E_Q[\exp(-r(t-s))S_t\mid F_s]=S_s,\quad 0\leqslant s\leqslant t$$

其中 $\boldsymbol{F}=\{F_1,0\leqslant t\leqslant T\}$是 $X=\{X_t,0\leqslant t\leqslant T\}$的域流。此市场模型通常被称为指数 Lévy 市场模型。这类模型的对数收益率服从 Lévy 过程 X[7]。

二 3 类纯跳跃 Lévy 过程

(一)VG 过程(Variance Gamma, VG)

如果 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 服从分布 gamma$(\alpha/n,\beta)$且相互独立,则 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ 具有分布 gamma(α,β);因此,gamma 分布是无限可分的。对于每个参数组合 α 和 β,存在一个 Lévy 过程(称为一个 gamma 过程),使得 $X(1)$具有分布 gamma(α,β)。通过独立地对增量

$$X(t_{i+1})-X(t_i)\sim \mathrm{Gamma}(a\cdot(t_{i+1}-t_i),\beta)$$

抽样,在时间网格 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 上对这一过程进行模拟。

一个 gamma 随机变量的取值始终为正,所以一个 gamma 过程是非降的。这使得其不适合作为一种风险资产价格(其对数)的模型。Madan 和 Seneta 提出了一个基于 Lévy 过程和 $X(t)=U(t)-D(t)$的模型,其中 U 和 D 分别代表 X 向上和向上移动的独立 gamma 过程,这称为 VG 过程。X 的增量可以通过 U 和 D 的增量进行模拟。

如果 $U(1)$和 $D(1)$具有相同的形状参数和尺度参数,则 X 具有另一种表示法 $W(G(t))$,其中 W 是一个标准布朗运动,G 是一个 *gamma* 过程。换言之,X 可以看作是对一个普通布朗运动应用随机时间变化的结果:确定性时间变量 t 被替换成了随机时间函数 G(t),其变为给定 G(t)下 W(G(t))的条件方差。这就解释了"*Variance gamma*"(方差 *gamma*)这个名字。

Madan 等考虑了 W(G(t))的更一般情况,其中 W 具有漂移项 μ 和方差 σ^2。他们把 $G(1)$的形状参数限定为其尺度参数 β 的倒数(从而 $E[G(t)]=t$),并且证明这个 VG 分布仍然可以表示成两个独立 gamma 分布之差 $U(t)-D(t)$。$U(1)$和 $D(1)$的形状参数和尺度参数必须满足 $a_U=a_D=1/\beta$,同时

$$\beta_U\beta_D=\frac{\sigma^2\beta}{2},\beta_U-\beta_D=\mu\beta$$

(二)NIG 过程(Normal Inverse Gaussian,NIG)

Barndorff-Nielsen 描述了一类过程,这类过程同 VG 模型具有一些相似点。它是一个增量服从 NIG 分布的 Lévy 过程;同时还能表示为一个随机时变的布朗运动。

参数为 $\delta,\gamma>0$ 的逆高斯分布的密度函数为

$$f_{IG}(x)=\frac{\delta \mathrm{e}^{\delta\gamma}}{\sqrt{2\pi}}x^{-3/2}\exp\left(-\frac{1}{2}(\delta^2x^{-1}+\gamma^2x)\right),\quad x>0 \tag{1}$$

式子(1)表示漂移参数为 γ 的布朗运动在水平 δ 的首达时间的密度函数。它的均值为 δ/γ,方差为 δ/γ^3。逆高斯分布是无限可分的:如果 X_1 和 X_2 相互独立,且具有参数为(δ_1,γ)和(δ_2,γ)的密度函数,则根据首达时间的含义,很明显 X_1+X_2 具有参数为$(\delta_1+\delta_2,\gamma)$的密度函数。由此可得,存在 Lévy 过程 $Y(t)$,对于 Y(1)其密度函数为式子(2)。

参数为 α,β,μ,δ 的 NIG 分布 $NIG(\alpha,\beta,\mu,\delta)$具有如下形式的分布:

$$\mu+\beta Y(1)+\sqrt{Y(1)}Z,Z\sim N(0,1), \tag{2}$$

其中 $Y(1)$的密度函数为式子(1),$\alpha=\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$,同时 Z 与 $Y(1)$相互独立。这个分布函数的均值和方差分别为

$$\mu+\frac{\delta\beta}{\alpha\sqrt{1-(\beta/\alpha)^2}} \text{和} \frac{\delta}{\alpha(1-(\beta/\alpha)^2)^{3/2}}$$

Barndorff-Nielsen 以修正的 Bessel 函数给出了这个分布的密度函数。

独立 NIG 随机变量可以按照如下方式相加:

$$NIG(\alpha,\beta,\mu_1,\delta_1)+NIG(\alpha,\beta,\mu_2,\delta_2)=NIG(\alpha,\beta,\mu_1+\mu_2,\delta_1+\delta_2)$$

特别地,这些分布是无限可分的。Barndorff-

Nielson 研究了带 NIG 增量的 Lévy 过程。这样一个过程 $X(t)$ 可以表示成 $W(Y(t))$,其中 $Y(t)$ 是式子(1)定义的 Lévy 过程,而 W 是带漂移参数 β、单位方差、初始值 $W(0)=\mu$ 的布朗运动。当 $t=1$ 时,表达式简化为式子(2)。

(三) Meixner 过程

Schoutens and Teugels (1998)在文献中介绍了 Meixner 过程,随后 Grigelionis (1999)将它应用于拟合股票收益。

Meixner 过程起源于正交多项式理论。Meixner 分布$(1, 2\zeta-\pi, \delta)$是 Meixner-Pollaczek 正交多项式 $\{P_n(x;\delta,\zeta), n=0,1,\cdots\}$ 的测度。同时,首一 Meixner-Pollaczek 多项式 $\{\bar{P}_n(x;\delta,\zeta), n=0,1,\cdots\}$ 是在 Meixner 过程上的鞅。

Meixner 过程($\alpha=1, \delta=1, \zeta=(\beta+\pi)/2$ 表达为:

$$E[\widetilde{P}_n(X_t^{(Meixner)};t,\zeta) \mid X_s^{(Meixner)}] = \widetilde{P}_n[X_s^{(meixner)};s,\zeta)$$

标准布朗运动 $\{W_t, t\geqslant 0\}$ 和 Hermite 多项式 $\{H_n(x;\sigma), n=0,1,\cdots\}$ 具有相似的鞅结构,即:

$$E[\widetilde{H}_n(W_t;t) \mid W] = \widetilde{H}_n(W_s;s)$$

Meixner 分布是广义 Z 分布(Generalized z (GZ) distributions)的一种特殊情况, Meixner 分布的特征函数为

$$\phi_{GZ}(u;\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta) = \left(\frac{B(\beta_1 + i\alpha u/2\pi, \beta_2 - i\alpha u/2\pi)}{B(\beta_1,\beta_2)}\right)^{2\delta}$$

其中 $\alpha,\beta_1,\beta_2,\delta>0$。对于

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2\pi} \text{ 和 } \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2\pi}$$

我们可以获得 Meixner 过程。

NIG 过程和 Meixner 过程可以相互转化。

三　一篮子期权定价模型

假定市场是无套利的,存在风险中性定价测度 $\boldsymbol{Q}$。考虑 n 支股票的交易市场,股票 i 在时刻 t 的价格水平定义为 $S_i(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$。篮子内资产在时刻 t 的价格为 $S(t)$:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i S_i(t)$$

其中 $w_i>0$ 是预先设定好的且是严格正的,在执行价格 K、到期日为 T 下的一篮子期权的收益可以表示为$(S(T)=K)_+$,其中$(x)_+=\max(x,0)$。此一篮子期权的价格定义为 $C[K,T]$。

考虑带无限可分分布 L 的 Lévy 过程 $Y=\{Y(t) \mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$。更进一步,定义随机变量 A

$$A = Y(1)$$

在这种情况下,A 的特征函数为 ϕ_L,$S(t)$ 和是相依随机变量的加权和,而它的累积概率分布未知。

利用$\widetilde{S}(T)$逼近 $S(T)$ 和,定义为

$$\widetilde{S}(T) = \bar{S}(T) + \lambda \tag{3}$$

其中 $\lambda\in\boldsymbol{R}$,且

$$\bar{S}(T) = S(0)\exp\{\bar{\mu} - \bar{\omega})T + \bar{\sigma}\sqrt{T}A\} \tag{4}$$

参数$\bar{\mu}\in\boldsymbol{R}$ 决定漂移率,波动率参数为$\bar{\sigma}>0$,转移(shifting)参数是 λ,$\bar{\omega}$是假定是有限的均值-修正参数,定义为

$$\bar{\omega} = \frac{1}{T}\log\phi_L(-i\,\bar{\sigma}\sqrt{T})$$

利用三阶矩匹配的方法逼近一篮子期权价格 $C^{AP}[K,T]$,定义为

$$C^{AP}[K,T] = e^{-rt}\boldsymbol{E}[(\bar{S}(T) - (K-\lambda))_+]$$

通过 $\widetilde{S}(T)$ 的表达式(3),$C^{AP}[K,T]$ 价格表达为

$$C^{AP}[K,T] = e^{-rt}\boldsymbol{E}[(\widetilde{S}(T) - (K-\lambda))_+]$$

$\bar{S}(T)$ 依赖于 λ 的选择。为了确定 $C^{AP}[K,T]$ 价格,我们需要计算出带漂移执行价格 $K-\lambda$ 的 $\bar{S}(T)$。

$\log\widetilde{S}(T)$ 的特征函数为 $\phi_{\log\bar{S}(T)}$:

$$\phi_{\log\bar{S}(T)}(u) = \boldsymbol{E}[e^{iu\log\bar{S}(T)}]$$

利用表达式(4)有

$$\phi_{\log\bar{S}(T)}(u) = \boldsymbol{E}[\exp\{iu(\log S(0) + (\bar{\mu} - \bar{\omega})T + \bar{\sigma}\sqrt{T}A)\}]$$

因为 A 的特征函数是 ϕ_L,从而我们有

$$\phi_{\log\bar{S}(T)}(u) = \exp\{iu(\log S(0) + (\bar{\mu} - \bar{\omega})T)\}\phi_L(u\bar{\sigma}\sqrt{T})$$

此种三阶矩匹配的方法也可以对价差期权进行定价。

四　实证分析

在这一部分,利用三阶矩匹配逼近方法对 7 支股票指数组成的一篮子期权定价,比较经典 Black-Scholes 模型与 3 类 Lévy 过程:VG、NIG、Meixner 过程一篮子期权价格的结果。

指数挂钩担保投资凭证 (Index-linked guaranteed investment, ILGICs)是提供给金融市场的一类非常好的一篮子期权的例子。随着利率水平的不断下降,ILGICs 在金融市场变得非常流行。几乎每一个加拿大银行都提供此类产品。ILGIC 是零售储蓄工具,类似于定期存款。当产品到期时,总的收益将由预先设

定的标的指数收益决定。ILGIC 是通过聚合零息票债券来设计的,一篮子期权由标的指数的即期利率组成。

G-7 股票市场分别由加拿大 TSE 100 指数(TSE 100)、法国 CAC 40 指数(CAC 40)、德国 DAX 指数(DAX)、意大利 MIB 30 指数(MIB 30)、日本日经225 指数(Nikkei 225)、英国富时 100 指数(FTSE 100)、美国标准普尔 500 指数(S&P 500)组成,将其视为一篮子投资组合,进行计算分析。

关注 G-7 股票市场构成的一篮子期权定价,考虑一个加权平均 G-7 股票指数的看涨期权的最大收益。定义为

$$A(T) = \sum_{i=1}^{7} a_i \frac{S_i(T)}{S_i(0)}$$

其中 a_i 是权重值,$\sum_{i=1}^{7} a_i = 1$。根据无套利的原则,对在期权有效期结束时的期权收益期望,以无风险利率 r 进行折现。一篮子看涨期权的定价为:

$$basket.call = e^{-rT} E * \{\max(A[T]) - 1, 0\}$$

表 1 中给出了 7 个指数的基本信息,加拿大信用公司设定了 7 个指数的权重。我们从雅虎财经网站获取 2016 年 4 月 13 日的数据。

表 2 列出了对数收益率相关性系数。令 $T=30$ 天,即期权的执行时间是 2016 年 5 月 13 日。在相关参数 $\rho=0.1, 0.5$ 和 0.8 下,观察表 3,每一个模型都产生了一个一篮子期权价格,并且相互不同,这就产生了所谓的“模型风险”。但是,经典的 Black-Scholes 模型结果与其他三类 Lévy 过程数据相差较多,VG、NIG 和 Meixner 模型结果差别不大。我们可以发现,当 K 小于 105 时,一篮子期权价格 $C^{VG}[K, t]$,$C^{NIG}[K,T]$,$C^{Meixner}[K,T]$ 比 $C^{BS}[K,T]$ 都大。但是,当执行价格 $K=110$ 时,$C^{BS}[K,L]$ 很接近其他 Lévy 类篮子价格。这是由于非高斯情况下的边界对数收益是负偏的,而这些分布在高斯的情况下是对称的。这种偏斜表明执行价格足够大的实值期权出现的概率更低。因此,Black-Scholes 不能解释波动率偏态的问题,而 Lévy 过程却能对其进行准确的描述。体现了 Lévy 过程在带跳的金融市场下,对一篮子期权定价的优越性。

表 1 7 个指数的基本信息

指数	国家	权重(%)	历史波动率(%)	股票收益率(%)
TSE100	加拿大	10	11.24	1.46
CAC40	法国	15	20.72	2.19
DAX	德国	15	14.26	1.32
MIB30	意大利	5	17.66	1.90
Nikkei225	日本	20	14.89	0.85
FTSE100	英国	10	15.25	3.59
S&P500	美国	25	16.08	1.66

表 2 相关性矩阵

	TSE100	CAC40	DAX	MIB30	Nikkei225	FTSE	S&P500
TSE100	1.0000	0.3400	0.0800	0.2100	0.0800	0.1900	0.6900
CAC40	0.3400	1.0000	0.4100	0.3000	0.5000	−0.1100	0.1800
DAX	0.0800	0.4100	1.0000	0.6100	0.8600	−0.2800	0.0700
MIB30	0.2100	0.3000	0.6100	1.0000	0.4800	−0.3100	0.3800
Nikkei225	0.0800	0.5000	0.8600	0.4800	1.0000	−0.3800	0.1900
FTSE100	0.1900	−0.1100	−0.2800	−0.3100	−0.3800	1.0000	−0.0300
S&P500	0.6900	0.1800	0.0700	0.3800	0.1900	−0.0300	1.0000

表 3 不同模型下的一篮子期权价格

ρ	K	$C^{BS}[K,T]$	$C^{VG}[K,T]$	$C^{NIG}[K,T]$	$C^{Meixner}[K,T]$
0.1	90	10.1904	10.8283	10.9125	10.8976
	95	5.9648	6.7759	6.7940	6.8243
	100	2.8853	3.4864	3.4231	3.4678
	105	1.1006	1.2967	1.2731	1.2864
	110	0.3341	0.3722	0.3767	0.3728

续表

ρ	K	$C^{BS}[K,T]$	$C^{VG}[K,T]$	$C^{NIG}[K,T]$	$C^{Meixner}[K,T]$
0.1	90	10.3678	11.2496	11.3218	11.3219
	95	6.3451	7.3176	7.3054	7.3478
	100	3.3389	4.0513	3.9642	4.0156
	105	1.5041	1.7360	1.6871	1.7045
	110	0.5706	0.5768	0.5741	0.5763
0.8	90	10.5256	11.5379	11.6053	11.6054
	95	6.6177	7.6781	7.6429	7.6973
	100	3.6742	4.4355	4.3367	4.3678
	105	1.7858	2.0785	1.9971	2.0215
	110	0.7530	0.7661	0.7627	0.7538

五　总结与展望

由于经典 Black-Scholes 模型对描述带跳的金融市场系统性风险存在许多不足，近几年学者通过大量实证研究表明 Lévy 过程在描述股票价格特征方面比经典 Black-Scholes 模型更符合其真实的行为表现。故本文在 Lévy 市场下,对一篮子期权进行定价,实证分析表明相比 Black-Scholes 模型,3 类纯跳 Lévy 过程更能描述资产“尖峰厚尾”和偏态的特征。由此可见,带跳跃的 Lévy 过程在一篮子期权定价方面比 Black-Scholes 模型更加准确。

当前,国内对一篮子期权的研究还处于起步阶段,大部分的研究局限于标准欧式期权,未来的研究可以扩展到交易更加方便的美式期权。同时,一篮子期权还可以与其它类型的奇异期权进行组合,以形成更具有灵活性的期权组合,例如一篮子期权可以与相关数字期权结合,得到一篮子数字期权,或者与外部亚式障碍期权结合得到一篮子障碍期权等。

[参考文献]

[1] Black F, Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities[J]. Journal of Politic-al Economy, 1973, 81(3): 637-654.

[2] R C Merton. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 125-144.

[2] Carr P, Wu L. Time-changed Lévy processes and option pricing[J]. Journal of Financial Economics, 2004, 71(1): 113-141.

[3] Kim Y S, Rachev S T, Bianchi M L, et al. Financial market models with Lévy processes and time-varing volatility[J]. Journal of Banking and Finance, 2008, 32(7): 1363-1378.

[4] David Applebaum. Lévy Process and Stochastic Calculus [M]. Cambridge: Cambridge Uni-versity Press, 2004.

[5] 陈浪南,孙坚强.股票市场资产收益的跳跃行为研究[J].经济研究,2010(4):54-66.

[6] 吴恒煌,朱福敏.GARCH 驱动的历史滤波服从 Levy 过程的期权定价[J].系统工程学报,2012,27(3):327-337.

[7] 程希彦. 基于随机跃迁概率的金融期权风险定价模型构建[J]. 统计与决策, 2014(15):170-173.

Research on a Basket Option Pricing Based on Lévy Process

QIU Hong

(*Tianjin University of Science & Technology*, *Tianjin* 300222, *China*)

Abstract: This paper takes into account the actual characteristics of the financial markets with jumps. Because the Lévy process can accurately depict the movement of the stock market, a Lévy process is introduced to construct a basket option pricing model, and obtain the approximate distribution of a basket option by the third moment matching method. Finally, the classical Black-Scholes model with three types of Lévy process pricing is compared by using a basket of options indexed by the index-linked security index. The results show the superiority of Lévy process to pricing a basket of options in a financial market with jumps.

Key words: Lévy process; a basket option; option pricing